Ս. Մ. ՆԻԿՈԼՍԿԻ, Մ. Կ. ՊՈՏԱՊՈՎ,
Ն. Ն. ՌԵՇԵՏՆԻԿՈՎ, Ա. Վ. ՇԵՎԿԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

8-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրապարակություն

Երևան
«Անտարես»
2017

ՀՏԴ 373.167.1: 512 (075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72
Հ 316

Դասագիրքը երաշխավորված է Հայաստանի Հանրապետության կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Թարգմանությունը և փոփոխությունները՝ **Ռ. Ավետիսյանի**

Никольский С.М. и др. Алгебра: учебник 8-го класса

Հ 316 Հանրահաշիվ, 8-րդ դասարանի դասագիրք/թարգմանիչ՝ Ռուբեն Ավետիսյան: Եր., Անտարես, 2017,– 272 էջ:

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ:

Պայմանական նշաններ դասագրքում.

⊙ - բանավոր աշխատանքների համար նախատեսված պարզագույն առաջադրանքներ

❖ - առավել դժվար առաջադրանքներ և ոչ պարտադիր թեմաներ

ՀՏԴ 373.167.1: 512 (075.3)
ԳՄԴ 22.14 ց72

ISBN 978-9939-76-060-5

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2: \end{cases}$$

1.1. Երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումներ

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

հավասարումը, որտեղ a, b, c-ն տրված թվեր են, ընդ որում՝ a և b թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, իսկ x-ը և y-ն անհայտներ են, անվանում են ***երկու՝*** x և y ***անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարում:***

Այդ անվանումը կապված է այն բանի հետ, որ (1) հավասարման ձախ մասը x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի կատարյալ տեսքի բազմանդամ է:

a և b թվերն անվանում են ***անհայտների գործակիցներ,*** a թիվը՝ x-ի գործակից, իսկ b թիվը՝ y-ի գործակից:

$$ax,\ by,\ c$$

արտահայտություններն անվանում են (1) ***հավասարման անդամներ,*** ընդ որում՝ c թիվն անվանում են ***ազատ անդամ:***

$(x_0; y_0)$ թվազույգն անվանում են (1) ***հավասարման լուծում,*** եթե x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0, իսկ y-ի փոխարեն՝ y_0, հավասարումը վերածվում է թվային ճիշտ հավասարության՝

$$ax_0 + by_0 + c = 0:$$

Երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման օրինակ է

$$2x - 3y + 3 = 0 \qquad (2)$$

հավասարումը: Նրա մեջ $a = 2$, $b = -3$, $c = 3$: (0; 1) թվազույգը (2) հավասարման լուծում է: Դժվար չէ համոզվել, որ (2) հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Իրոք, եթե (2) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք ցանկացած x_0 թիվ, ապա կստանանք y անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում: Լուծելով այն՝ կստանանք մի որևէ y_0 թիվ, որը վերցված x_0 թվի հետ կազմում է $(x_0; y_0)$ թվազույգ. այն (2) հավասարման լուծում է:

Վերցնելով, օրինակ, $x_0 = 1$՝ կստանանք y անհայտով առաջին աստիճանի

$$2 \cdot 1 - 3y + 3 = 0$$

հավասարումը:

Նրա արմատն $y = \frac{5}{3}$ -ն է: Հետևաբար $\left(1; \frac{5}{3}\right)$ թվազույգը (2) հավասարման լուծում է:

Համանման ձևով, նախապես ընտրված ցանկացած x_0 թվի դեպքում լուծելով y-ի նկատմամբ ստացված առաջին աստիճանի

$$2x_0 - 3y + 3 = 0$$

հավասարումը, կստանանք՝

$$-3y = - 2x_0 - 3,$$

$$y = -\frac{2x_0}{-3} + \frac{-3}{-3},$$

$$y = \frac{2}{3}x_0 + 1: \qquad (3)$$

Հետևաբար, յուրաքանչյուր x_0 թվի համապատասխանում է (2) հավասարման $(x_0; y_0)$ լուծում, որտեղ y_0-ն, ըստ տրված x_0-ի, որոշվում է (3) բանաձևով:

Օրինակ, եթե $x_0 = 0$, ապա (3) բանաձևից հետևում է, որ $y_0 = 1$ ուստի (0; 1) թվազույգը (2) հավասարման լուծում է: Իսկ եթե $x_0 = 3$, ապա կստանանք՝ $y_0 = 3$, ուստի (3; 3) թվազույգից (2) հավասարման լուծում է և այլն:

Կարելի է նաև ասել, որ (2) հավասարման համար ցանկացած

$$\left(x_0; \frac{2}{3}x_0 + 1\right)$$

թվազույգ լուծում է, որտեղ x_0-ն ցանկացած թիվ է:

Ընդհանրապես,

$$ax + by + c = 0 \qquad (4)$$

տեսքի ցանկացած հավասարում, որի մեջ b գործակիցը զրոյից տարբեր է, ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որովհետև ցանկացած $x = x_0$ թվի համար այն կարելի է լուծել y անհայտի նկատմամբ, և այդ դեպքում ստացված

$$y_0 = \frac{-c - ax_0}{b}$$

թիվն տրված x_0 թվի հետ կազմում է $(x_0; y_0)$ թվազույգը, որը (4) հավասարման լուծում է: Քանի որ x_0 թվերն անվերջ շատ են, ուստի (4) հավասարման լուծումներն անվերջ շատ են:

Օրինակ.

$$2x - 5y + 2 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով և նշենք այդ հավասարման բոլոր լուծումները:

Լուծում: Ունենք՝

$$5y = 2x + 2,$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}: \qquad (6)$$

(6) բանաձևն y-ը արտահայտում է x-ով: (5) հավասարման բոլոր լուծումները գրառվում են

$$\left(x; \frac{2}{5}x + \frac{2}{2}\right)$$

տեսքով, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Համանման դատողությամբ կարող ենք ասել, որ զրոյից տարբեր a գործակցով (4) տեսքի ցանկացած հավասարում ունի անվերջ շատ լուծումներ: Բոլոր այդ լուծումները գրառվում են

$$\left(-c - \frac{by}{a}; y\right)$$

տեսքով, որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է:

Առաջադրանքներ

1. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում: Բերեք օրինակներ:
բ) Ի՞նչն են անվանում $ax + by + c = 0$ հավասարման լուծում, որտեղ a և b գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի:

2. Քանի՞ լուծում ունի $x - y + 1 = 0$ հավասարումը:

3. Անվանեք $5x - 2y + 3 = 0$ հավասարման անդամները, x-ի և y-ի գործակիցները, ազատ անդամը:

4. Հավասարումն արդյոք երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում է (անվանեք անհայտների գործակիցները և ազատ անդամը).

ա) $3x - y + 5 = 0$;
բ) $2x - 5y - 1 = 0$;
գ) $2x + 3y - 1 = 0$;
դ) $0 \cdot x - 5y - 4 = 0$;
ե) $5x - 4 = 0$;
զ) $0 \cdot x + 0\, y = 0$;
է) $2y - 3x + 4 = 0$;
ը) $x - 0 \cdot y - 3 = 0$:

5. Տրված a, b, և c թվերով կազմեք առաջին աստիճանի երկու անհայտով հավասարում.

ա) $a = 5,\ b = 4,\ c = -2;$ բ) $a = 0,\ b = -3,\ c = 4;$

գ) $a = 0,\ b = 2,\ c = -1;$ դ) $a = -5,\ b = -1,\ c = 0:$

6. Բերեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման երեք օրինակ:

7. Ցույց տվեք, որ (1; –1), (5; –7), (–3; 5) թվազույգերը $3x + 2y - 1 = 0$ հավասարման լուծումներ են:

8. Ստորև բերված թվազույգերից որո՞նք են $2x - y + 4 = 0$ հավասարման լուծումներ.

ա) (1; –2); բ) (0; 4); գ) (–2; 1);

դ) (3; 4); ե) (5; 0); զ) (–2; 0):

9. (1; 3) թվազույգը տրված հավասարման լուծո՞ւմ է, թե՞ ոչ.

ա) $2x - 3y + 5 = 0;$ բ) $-x + y - 2 = 0;$

գ) $x - y - 6 = 0;$ դ) $7x - 3{,}2y + 4 = 0;$

ե) $x + 2y - 7 = 0;$ զ) $0 \cdot x - 7y + 21 = 0:$

10. Գտեք հավասարման երեք լուծում.

ա) $x + y - 5 = 0;$ բ) $y - 5 = 0;$

գ) $2x - y + 2 = 0;$ դ) $x + 3 = 0:$

Տրված հավասարումից y-ն արտահայտեք x-ով (11, 12).

11. ա) $x + y = 5;$ բ) $2x - y = 3;$

գ) $-3x + 2y = 7;$ դ) $3x - 5y = 8;$

ե) $-3{,}5x + 2y = 0{,}2;$ զ) $x - 0{,}3y - 0{,}2:$

12. ա) $4x - y + 3 = 0;$ բ) $x - 3y + 6 = 0;$

գ) $3x + y - 2 = 0;$ դ) $5x - 7y - 3 = 0;$

ե) $4x - 2y + 8 = 0;$ զ) $0{,}5x - 2y + 0{,}6 = 0;$

է) $\frac{1}{3}x - 0{,}2y + 1 = 0;$ ը) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} - 2 = 0:$

13. Հավասարումից x-ն արտահայտեք y-ով.

ա) $x - 3y + 2 = 0;$ բ) $3x + 2y - 5 = 0;$

գ) $-x + 2y - 3 = 0;$ դ) $-5x - y + 7 = 0;$

ե) $2x - y + 4 = 0$;

զ) $2x - \frac{1}{2}y - 4 = 0$;

է) $2x - 0{,}3y - 1 = 0$;

ը) $\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}y + 4 = 0$:

14. Նշեք հավասարման որևէ լուծում.

ա) $4x - y - 2 = 0$;

բ) $3x + 2y - 7 = 0$;

գ) $x - 2y + 4 = 0$;

դ) $5x - 3y - 2 = 0$:

15. Կազմեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում՝ ելնելով հետևյալ պայմանից՝
ա) Երկու թվերի գումարը հավասար է 10:
բ) 2 լ կաթը և 3 բատոն հացը միասին արժեն 990 դրամ:
գ) Գրիչը մատիտից 700 դրամով թանկ է:
դ) 1 կգ սուրճը 3 կգ կոնֆետից 570 դրամով թանկ է:

16. ա) a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $(3; -2)$ թվազույգը $3x - ay - 4 = 0$ հավասարման լուծում է:
բ) b-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում $(-1; -4)$ թվազույգը $bx - 7y - 3 = 0$ հավասարման լուծում է:

1.2. Երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգեր

Խնդիր: Հայտնի է, որ եղբոր ու քրոջ տարիքների տարբերությունը 3 է, իսկ գումարը՝ 15: Քանի՞ տարեկան է եղբայրը և քանի՞ տարեկան՝ քույրը:

Լուծում: Պետք է գտնել երկու անհայտ մեծություններ՝ եղբոր տարիքը և քրոջ տարիքը: Դիցուք՝ եղբայրը x տարեկան է, իսկ քույրը՝ y տարեկան: Քանի որ նրանց տարիքների տարբերությունը 3 է, ուստի

$$x - y = 3: \qquad (1)$$

Մյուս կողմից՝ եղբոր և քրոջ տարիքների գումարը 15 է, նշանակում է՝

$$x + y = 15: \qquad (2)$$

Որոնելի x և y թվերը միաժամանակ պետք է բավարարեն (1) և (2) հավասարումներին: Հետևաբար խնդիրը բերվում է (1) և (2) հավասարումներին միաժամանակ բավարարող x և y թվերի զույգերը գտնելուն:

Նման դեպքում ասում են, որ տրված է երկու՝ x և y անհայտներով երկու հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 15: \end{cases}$$

Այս համակարգի համար կարելի է ընտրել թվերի այսպիսի զույգ՝ $x = 9$, $y = 6$: Հետևաբար, կարելի է ասել, որ եղբայրը 9 տարեկան է, քույրը՝ 6 տարեկան:

Պատասխան՝ 9 և 6 տարեկան:

Հաջորդ կետում մենք կիմանանք, թե ինչպես կարելի է գտնել այդպիսի համակարգերի լուծումները:

Դիցուք, տրված են x և y անհայտներով առաջին աստիճանի երկու հավասարումներ՝

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{և} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0: \qquad (3)$$

Ասում են, որ տրված է ***երկու՝ x և y անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարման համակարգ,*** եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն $(x_0; y_0)$ թվազույգերը, որոնք միաժամանակ (3) հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումներն են:

Ընդունված է համակարգի հավասարումները գրառել սյունակով՝ մեկը մյուսի տակ, և դրանք ձախից միավորել ձևավոր փակագծով՝

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0: \end{cases} \qquad (4)$$

(4) ***համակարգի լուծում*** անվանում են այնպիսի $(x_0; y_0)$ թվազույգ, որն այդ համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծում է:

Լուծել համակարգը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծում չկա:

Ընդունված է լուծում չունեցող համակարգն անվանել ***անհամատեղելի:***

Բերենք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգերի օրինակներ.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y + 4 = 0; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - 2y + 3 = 0; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ 6x + 3y + 6 = 0; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} 3x + 0y + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} 2x + 0y - 5 = 0, \\ 3x + 0y + 2 = 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} 5x + 0y - 1 = 0, \\ 0x + 3y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Եթե (4) համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և բավարարում են $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ պայմանին, ապա ասում են, որ այդ համակարգի անհայտների ***գործակիցները համեմատական են:***

Օրինակ՝ (6) համակարգի անհայտների գործակիցները համեմատական են: (7) համակարգի անհայտների գործակիցները նույնպես համեմատական են. ավելին՝ նրանք համեմատական են նաև ազատ անդամներին՝

$$2 : 6 = 1 : 3 = 2 : 6:$$

Եթե (4) համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և բավարարում են $a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2$ պայմանին, ապա ասում են, որ (4) համակարգի անհայտների ***գործակիցները համեմատական չեն:***

Օրինակ՝ (5) համակարգի անհայտների գործակիցները համեմատական չեն:

Սովորաբար հավասարումներում $0 \cdot x$ և $0 \cdot y$ տեսքի անդամները բաց են թողնում: Այդ դեպքում (8), (9) և (10) համակարգերը կգրառվեն հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0; \end{cases} \qquad (8')$$

$$\begin{cases} 2x - 5 = 0, \\ 3x + 2 = 0; \end{cases} \qquad (9')$$

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0: \end{cases} \qquad (10')$$

Առաջադրանքներ

17. Բերեք երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգի օրինակ:

18. Պարզեք՝ (–3; 1) թվազույգը տվյալ համակարգի լուծո՞ւմ է.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x - 3y - 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y + 5 = 0: \end{cases}$

19. ա) Ի՞նչն են անվանում երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգի լուծում:
բ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել համակարգը:

20. Բերեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգերի օրինակներ, որոնցում անհայտների գործակիցները.
ա) համեմատական են, բ) համեմատական չեն:

21. Համակարգի հավասարումներում անվանեք անհայտների գործակիցները և ազատ անդամները.

ա) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 4 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -2x - 6 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} -3x - 2y + 7 = 0, \\ 2x + 5 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} -4x - 5 = 0, \\ 2y + 4 = 0: \end{cases}$

22. Անհայտների՝ տրված a, b, a_1, b_1 գործակիցներով c և c_1 ազատ անդամներով կազմեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգ:

a	b	c	a_1	b_1	c_1
2	–3	1	1	5	4
–2	1	0	3	1	–7
0	–4	–2	–1	0	0
–1	1	–4	0	–5	3

23. Ցույց տվեք, որ (1; 2) թվազույգը յուրաքանչյուր համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2{,}5x - 2{,}5 = 0, \\ \dfrac{1}{4}y - \dfrac{1}{2} = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0, \\ 4x - y - 2 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 0{,}35x + 1{,}6y - 3{,}55 = 0, \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{7} + \dfrac{5}{42} = 0: \end{cases}$

24. Ցույց տվեք, որ (–2; 1) թվազույգը տվյալ համակարգի լուծում չէ.

ա) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0, \\ 3x - 4 = 0: \end{cases}$

25. (2; 1), (1; 2), (5; –3), (0; 2), (1; 0), (1; –4) թվազույգերից որո՞նք են բերված համակարգի լուծում.

ա) $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ 2x + 3y - 6 = 0: \end{cases}$

26. (–1; 4) թվազույգը տվյալ համակարգի լուծո՞ւմ է, թե՞ ոչ.

ա) $\begin{cases} -x + y - 3 = 0, \\ 2x - y + 6 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 5y - 2 = 0, \\ 2x + 3y - 10 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \text{գ) } x - 2y - 5 = 0; \\ 6x + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} -3y + 12 = 0, \\ 6x + y + 2 = 0: \end{cases}$

27. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում (1; 0) թվազույգը բերված համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases} 2x + y = a, \\ \text{b}x - y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x - ay = 3, \\ 2x + y = b: \end{cases}$

28. Ելնելով տրված պայմանից, կազմեք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգ.
ա) երկու թվերի գումարը 7 է, իսկ տարբերությունը՝ 2,
բ) երկու թվերի տարբերությունը 12 է, իսկ գումարը՝ 27:

1.3. Տեղադրման կանոնը

Այս կետում դիտարկվում են երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների այնպիսի համակարգեր, որոնցում անհայտների բոլոր գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն: Յուրաքանչյուր այդպիսի համակարգ ունի միակ լուծում:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0, \\ 3x + 4y - 27 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

Դիցուք՝ $(x_0; y_0)$ թվազույգը (1) համակարգի լուծում է: Դա նշանակում է, որ ճիշտ են հետևյալ թվային հավասարությունները՝

$$2x_0 - y_0 + 4 = 0,$$
$$3x_0 + 4y_0 - 27 = 0: \qquad (2)$$

Առաջին հավասարությունից y_0-ն արտահայտենք x_0-ով՝

$$y_0 = 2x_0 + 4: \qquad (3)$$

Այնուհետև, երկրորդ հավասարությունում y_0-ն փոխարինենք իրեն հավասար $2x_0 + 4$ թվով, այսինքն՝ երկրորդ հավասարությունում y_0-ի փոխարեն տեղադրենք $2x_0 + 4$: Կստանանք

$$3x_0 + 4\,(2x_0 + 4) - 27 = 0$$

թվային ճիշտ հավասարությունը: Դա նշանակում է, որ x_0 թիվը բավարարում է

$$3x + 4(2x + 4) - 27 = 0$$

հավասարմանը, այսինքն՝ այդ հավասարման արմատ է:

Լուծելով այդ հավասարումը՝ գտնում ենք՝ $x = 1$: Հետևաբար, $x_0 = 1$:

Տեղադրելով գտած արժեքը (3) հավասարության մեջ՝ ստանում ենք, որ

$$y_0 = 6:$$

Այսպիսով, եթե (1) համակարգն ունի $(x_0; y_0)$ լուծում, ապա

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 6:$$

Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ համոզվում ենք, որ դրանք, իրոք, բավարարում են այդ հավասարումներին: Հետևաբար (1) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (1; 6):

Նկատենք, որ նույն արդյունքը մենք կստանայինք, եթե երկրորդ հավասարությունից y_0-ն արտահայտեինք x_0-ով և y_0-ի համար ստացված արտահայտությունը տեղադրեինք առաջին հավասարության մեջ:

Կարելի է նաև (2)-ի որևէ հավասարությունից x_0-ն արտահայտել y_0-ով և ստացված արտահայտությունը տեղադրել (2)-ի մյուս հավասարության մեջ: Ստանալու ենք նույն արդյունքը: Նմանատիպ դատողություններ կարելի է կատարել նաև ընդհանուր տեսքի՝

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

հավասարումների ցանկացած համակարգի համար, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն (համեմատական գործակիցներով հավասարումների համակարգեր մենք կուսումնասիրենք ավելի ուշ):

Վերը դիտարկվածից բխում է (4) համակարգի լուծման հետևյալ եղանակը, որն անվանում են ***տեղադրման եղանակ:***

Որպեսզի լուծենք (4) համակարգը, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն, անհրաժեշտ է.

1) Համակարգի հավասարումներից (օրինակ՝ y-ը) որևէ մեկից անհայտներից մեկն արտահայտել մյուս անհայտով,
2) Համակարգի մյուս հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրել ստացված արտահայտությունը,
3) լուծել ստացված x անհայտով հավասարումը,
4) տեղադրելով ստացված x_0 արժեքը y-ի արտահայտության մեջ՝ գտնել y_0-ն: Հենց (x_0; y_0) թվազույգը կլինի համակարգի միակ լուծումը:

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 4x - 5y - 1 = 0 \\ 7x - y + 6 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

(5) համակարգի երկրորդ հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով՝

$$y = 7x + 6 \qquad (6)$$

և առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $7x + 6$.

$$4x - 5\,(7x + 6) - 1 = 0: \qquad (7)$$

Լուծելով (7) հավասարումը՝ գտնում ենք նրա միակ արմատը՝ $x = -1$: Այս արժեքը տեղադրելով (6) հավասարության մեջ, գտնում ենք՝

$$y = 7x + 6 = 7 \cdot (-1) + 6 = -1:$$

Նշանակում է՝ (5) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $(-1; -1)$:

Առաջադրանքներ

29. Քանի՞ լուծում ունի երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգը, որի անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն:

Տեղադրման եղանակով լուծեք հավասարումների համակարգը (30, 31).

30. ա) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2x - 3y - 7 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + 5y = 0, \\ 3x + 7y - 16 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ x - 2y + 10 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 7x - y = 0, \\ 3x - y + 12 = 0: \end{cases}$

31. ա) $\begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x + y - 5 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ 3x - 2y - 9 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ 5x + y - 4 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + 2y - 11 = 0, \\ 4x - 5y + 8 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + 4y - 2 = 0, \\ 3x + 8y - 2 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x + 4y - 90 = 0, \\ x - 3y - 10 = 0; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0, \\ x + 5y - 7 = 0; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} 3x - 4y - 7 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} 7x - 2y - 6 = 0, \\ x + 4y + 12 = 0; \end{cases}$

ի) $\begin{cases} x - y - 12 = 0, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$ լ) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0, \\ x - y + 6 = 0: \end{cases}$

Լուծեք հավասարումների համակարգը (32, 33).

32. ա) $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0, \\ x - 3y - 11 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 3x + 2y + 5 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x + y + 5 = 0, \\ x - 3y - 5 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 5x + y - 15 = 0, \\ x - 2y - 14 = 0; \end{cases}$

33. ա) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ 3x + 4y - 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x - 3y - 5 = 0, \\ 6x + 8y + 11 = 0: \end{cases}$

1.4. Գործակիցների հավասարեցման (հանման) կանոնը

Մենք շարունակում ենք դիտարկել երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգեր, որոնցում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն: Ինչպես արդեն նշվել է, յուրաքանչյուր այդպիսի համակարգ ունի միակ լուծում:

Այդպիսի համակարգերի լուծման տեղադրման եղանակից բացի կա նաև այլ եղանակ, որն անվանվում է ***գործակիցների հավասարեցման*** կամ ***հանման եղանակ:***

Օրինակ 1. Լուծենք համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ենթադրենք, թե $(x_0;\ y_0)$ թվազույգը (1) համակարգի լուծում է: Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ կստանանք թվային ճիշտ հավասարություններ՝

$$\begin{aligned} &2x_0 + 3y + 1 = 0, \\ &3x_0 + 4y_0 + 2 = 0: \end{aligned} \qquad (2)$$

Այս հավասարություններում x_0-ի գործակիցները դարձնենք իրար հավասար: Դրա համար առաջին հավասարությունը բազմապատկելով 3-ով, իսկ երկրորդը՝ 2-ով՝ կստանանք.

$$\begin{aligned} &6x_0 + 9y_0 + 3 = 0, \\ &6x_0 + 8y_0 + 4 = 0 \end{aligned}$$

թվային ճիշտ հավասարությունները:

Առաջին հավասարությունից հանելով երկրորդը՝ կստանանք $y_0 - 1 = 0$ թվային ճիշտ հավասարությունը, որտեղից՝ $y_0 = 1$:

Տեղադրենք այդ թիվը (2) հավասարություններից առաջինի մեջ՝

$$2x_0 + 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$

որտեղից ստանում ենք՝ $x_0 = -2$:

Այսպիսով, եթե (1) համակարգն ունի $(x_0;\ y_0)$ լուծում, ապա դա կարող է լինել միայն $x = -2,\ \ y = 1$ թվերի զույգը:

Տեղադրելով այդ թվերը (1) համակարգի հավասարումների մեջ՝ համոզվում ենք, որ դրանք, իրոք, բավարարում են այդ հավասարումներին:

Հետևաբար (1) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $(-2;\ 1)$: y_0-ի փոխարեն 1 թիվը տեղադրեցինք (2) հավասարություններից առաջինի մեջ, սակայն արդյունքը նույնը կլիներ, եթե այդ թիվը տեղադրենք երկրորդի մեջ:

Իրոք, այդ դեպքում երկրորդ հավասարությունը կգրվեր $3x_0 + 4 \cdot 1 + 2 = 0$ տեսքով: Այստեղից ստանում ենք, որ $x_0 = -2$: Մենք նորից ստացանք արդեն գտած $(-2; 1)$ լուծումը: (2) հավասարություններում x_0-ի գործակիցները հավասարեցնելու փոխարեն կարելի է հավասարեցնել y_0-ի գործակիցները: Արդյունքը կլինի նույնը (դրանում համոզվեք ինքնուրույն):

Նման դատողություններ կարելի է անել նաև ցանկացած`

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգի համար, եթե նրանում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական չեն:

Արդյունքում կունենանք (3) համակարգի լուծման մի եղանակ, որն անվանում են ***գործակիցների հավասարեցման կամ հանման եղանակ:***

Այսպիսով, ընդհանուր առմամբ, վարվում են այսպես.

1) եթե $a_1 \neq a_2$ և $b_1 \neq b_2$, ապա հավասարումների ձախ և աջ մասերը բազմապատկում են այնպիսի թվերով, որ անհայտներից մեկի գործակիցները դառնան հավասար;
2) իրարից հանում են ստացված հավասարումները;
3) գտնում են ստացված մեկ անհայտով հավասարման արմատը;
4) գտած արմատը տեղադրում են տրված համակարգի հավասարումներից մեկի մեջ` գտնելով նաև երկրորդ անհայտի արժեքը:

Ստացված միակ $(x_0; y_0)$ թվազույգը կլինի (3) համակարգի լուծումը:

Դիտողություն: ա) Այն դեպքում, երբ $a_1 = a_2$ կամ $b_1 = b_2$, ապա անմիջապես կարելի է հավասարումները հանել:

բ) Եթե $a_1 = -a_2$ կամ $b_1 = -b_2$, ապա հարմար է համակարգի հավասարումները գումարել:

Վերը նկարագրած կանոնը երբեմն անվանում են ***հանրահաշվական գումարման եղանակ:***

Օրինակ 2. Գումարման եղանակով լուծենք համակարգը`

$$\begin{cases} 6x + 7y + 17 = 0, \\ 4x + 5y + 9 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Համակարգի առաջին հավասարումը բազմապատկելով 2-ով, իսկ երկրորդը` 3-ով` համակարգը ներկայացնենք այսպես`

$$\begin{cases} 12x + 14y + 34 = 0, \\ 12x + 15y + 27 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

(5) համակարգի երկրորդ հավասարումից հանելով առաջինը՝ կստանանք մեկ y անհայտով գծային հավասարում՝

$$y - 7 = 0,$$

որտեղից՝ $y = 7$: (4) համակարգի առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով 7 թիվը՝ ստանում ենք

$$6x + 49 + 17 = 0,$$

որտեղից՝ $x = -11$:

Հետևաբար (4) համակարգն ունի $(-11; 7)$ միակ լուծումը:

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ -x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Գումարելով համակարգի հավասարումները՝ ստանում ենք

$$5y - 10 = 0$$

գծային հավասարումը, որտեղից՝ $y = 2$: (6) համակարգի առաջին հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով 2, կստանանք

$$x + \boldsymbol{4 - 3 = 0},$$

որտեղից՝ $x = -1$: Հետևաբար (6) համակարգն ունի $(-1; 2)$ միակ լուծումը:

Առաջադրանքներ

Լուծեք հավասարումների համակարգը (34-38).

34. ա) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ x + y - 1 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0, \\ 3x + y + 3 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ 3x - y + 1 = 0: \end{cases}$

35. ա) $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ -x + 4y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ -x + 3y - 2 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 3x + y - 4 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ -x - y + 4 = 0: \end{cases}$

36. ա) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0, \\ 2x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 8 = 0, \\ 3x + 4y - 7 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} -6x + 2y + 6 = 0, \\ 5x - y - 17 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 2x - y - 5 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x + 5y - 15 = 0, \\ 3x + 2y - 6 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 4x - 5y - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 11 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0, \\ 3x - 2y - 25 = 0; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0, \\ 3x - 5y - 45 = 0: \end{cases}$

37. ա) $\begin{cases} 4x + 5y - 2 = 0, \\ x - 3y + 8 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 6x - 2y - 6 = 0, \\ 5x - y - 7 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ 3x + 2y - 5 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 7x - 2y + 15 = 0, \\ x - 3y - 6 = 0: \end{cases}$

38. ա) $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 9x - 3y + 6 = 0, \\ 4x - y + 2 = 0: \end{cases}$

1.5. Հավասարումների և հավասարումների համակարգերի համարժեքությունը

Հավասարումը, որի ձախ և աջ մասերը x-ի և y-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ կամ թվեր են, անվանում են x և y ***երկու փոփոխականներով գծային հավասարում***:

Գծային հավասարումների օրինակներ են.

$$2x - 3y + 1 = 0,$$
$$5x - 4y = 3x - 1,$$
$$2x - 3\,y = 5,$$
$$3x - y + 1 = 3x - y - 1,$$

Գծային հավասարման ձախ և աջ մասերում գտնվող բազմանդամների անդամներն անվանում են այդ հավասարման ***անդամներ:***

Երկու հավասարումներ անվանում են ***համարժեք***, եթե առաջին հավասարման ցանկացած լուծում լուծում է նաև երկրորդ հավասարման համար, և երկրորդի ցանկացած լուծում նաև առաջինի լուծում է: Համարժեք են կոչվում նաև երկու այնպիսի հավասարումներ, որոնցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

1) Եթե հավասարման աջ և ձախ մասերը բազմապատկենք զրոյից տարբեր միևնույն թվով (կամ բաժանենք զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա), ապա կստանանք սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ՝

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{և} \quad 4x - 6y + 2 = 0$$

հավասարումները համարժեք են:

2) Եթե հավասարման որևէ անդամ հակադիր նշանով տեղափոխենք նրա մի մասից մյուսը, ապա կստանանք սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ,

$$5x - 4y = 3x - 1 \quad \text{և} \quad 5x - 4y - 3x + 1 = 0$$

հավասարումները համարժեք են:

3) Եթե գծային հավասարման ձախ և աջ մասերում կատարվի նման անդամների միացում, ապա կստացվի սկզբնական հավասարմանը համարժեք հավասարում:

Օրինակ՝

$$2x - 7 + 3x - 4 = y \quad \text{և} \quad 5x - 11 = y$$

հավասարումները համարժեք են:

Այս պնդումների ապացուցումները կատարվում են նույն կերպ, ինչպես մեկ անհայտով գծային հավասարման դեպքում:

Եթե ցանկացած գծային հավասարման մեջ բոլոր անդամները տեղափոխենք ձախ մասում և կատարենք նման անդամների միացում, ապա կստացվի, որ այն համարժեք է

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարմանը, որում a, b և c-ն որոշակի թվեր են:

Եթե a և b թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա (1) հավասարումը, ինչպես արդեն ասվել է, առաջին աստիճանի հավասարում է:

Ենթադրենք, թե (1) հավասարման մեջ $a = b = 0$, $c \neq 0$, այդ դեպքում հավասարումն կունենա

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

տեսքը և ոչ մի $(x; y)$ թվազույգ չի բավարարի այդ հավասարմանը, այսինքն՝ (1) հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a = b = c = 0$, ապա (1) հավասարմանը բավարարում է ցանկացած $(x; y)$ թվազույգ:

Հավասարումների երկու համակարգեր անվանում են ***համարժեք***, եթե առաջին համակարգի ցանկացած լուծում երկրորդ համակարգի լուծում է, և երկրորդ համակարգի ցանկացած լուծում առաջին համակարգի լուծում է: Համարժեք են կոչվում նաև այն համակարգերը, որոնցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

Ակնհայտ է, որ եթե համակարգի հավասարումներից մեկը փոխարինվի իրեն համարժեք հավասարումով, ապա ստացված համակարգը համարժեք կլինի սկզբնական համակարգին: Այսպես, օրինակ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

համակարգը համարժեք է

$$\begin{cases} y = -2x + 1, \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

համակարգին:

Ստորև, օրինակների վրա, կդիտարկենք այնպիսի հավասարումների համակարգեր, որոնցում անհայտների գործակիցները 0-ից տարբեր են և համեմատական:

Օրինակ 1. Լուծենք հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Այս համակարգում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր և համեմատական են:

(2) համակարգի երկրորդ հավասարումը բաժանելով 2-ի՝ կստանանք (2) համակարգին համարժեք

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y + \dfrac{3}{2} = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգը: Այս համակարգի հավասարումների ազատ անդամները տեղափոխելով նրանց աջ մասերը՝ կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (4)$$

որը համարժեք է (3) համակարգին և հետևաբար՝ (2) համակարգին:

Ակնհայտ է, որ ոչ մի (x; y) թվազույգ չի կարող բավարարել (4) համակարգին, որովհետև միևնույն $x + y$ թիվը միաժամանակ չի կարող հավասար լինել և՛ 1-ի, և՛ $-\frac{3}{2}$-ի:

Այսպիսով, (4) համակարգը և, հետևաբար, նրան համարժեք (2) համակարգը լուծում չունի: Այդպիսի համակարգն անվանում են ***անհամատեղելի:***

Օրինակ 2. Լուծենք

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

հավասարումների համակարգը:

Այստեղ նույնպես գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական: Ավելին, նրանք համեմատական են ազատ անդամներին՝ $1 : 2 = 1 : 2 = 1 : 2$

Համակարգի երկրորդ հավասարումը բաժանելով 2-ի, կստանանք (5) համակարգին համարժեք՝

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

համակարգը:

Ակնհայտ է, որ (6) համակարգի լուծումների բազմությունը համընկնում է

$$x + y + 1 = 0$$

հավասարման լուծումների բազմության հետ:

Այդ հավասարումն ունի անթիվ բազմությամբ (x; y) լուծումներ, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, իսկ $y = -x - 1$: Դրա համար էլ (5) համակարգի բոլոր լուծումներն ունեն (x; $-x - 1$) տեսքը, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Վերն արված դատողությունները կարելի է կիրառել ցանկացած՝

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

տեսքի համակարգ լուծելիս, որում անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են և համեմատական: Եթե (7) համակարգի գործակիցները բավարարում են

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

պայմանին, ապա այդ համակարգը լուծում չունի: Իսկ եթե (7) համակարգի գործակիցները բավարարում են

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

պայմանին, ապա այդ համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որոնք համընկնում են այդ համակարգի հավասարումներից որևէ մեկի լուծումների բազմության հետ: Այդպիսի համակարգերը կարելի է լուծել այնպես, ինչպես դա արվեց 1 և 2 օրինակներում:

(2) և (5) համակարգերը լուծենք նաև տեղադրման եղանակով:

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 2y + 3 = 0: \end{cases}$$

Համակարգի առաջին հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով՝

$$y = -x + 1$$

և երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $-x + 1$.

$$2x + 2(-x + 1) + 3 = 0:$$

Կստանանք $0 \cdot x + 5 = 0$ հավասարումը, որը ցույց է տալիս, որ տված համակարգը լուծում չունի:

Օրինակ 4. Լուծենք հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x + 2y + 2 = 0: \end{cases}$$

Համակարգի առաջին հավասարումից y-ն արտահայտենք x-ով՝

$$y = -x - 1$$

և համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $-x -1$.

$$2x + 2(-x - 1) + 2 = 0:$$

Կստանանք $0 \cdot x + 0 = 0$ հավասարումը, որը ցույց է տալիս, որ $(-x - 1)$ թվին հավասար y թիվը բավարարում է համակարգի ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ հավասարումներին՝ x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում: Հետևաբար տվյալ համակարգի բոլոր լուծումներն ունեն $(x; -x - 1)$ տեսքը, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Առաջադրանքներ

39. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երկու անհայտով գծային հավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում գծային հավասարման անդամներ:
գ) Երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումը գծայի՞ն հավասարում է:

40. Բերեք երկու անհայտով գծային հավասարման օրինակ, որն առաջին աստիճանի հավասարում չէ:

41. ա) Ինչպիսի՞ երկու հավասարումներն են անվանում համարժեք:
բ) Ձևակերպեք պնդումներ գծային հավասարումների համարժեքության վերաբերյալ:
գ) Ինչպիսի՞ երկու համակարգերն են անվանում համարժեք:
դ) Ձևակերպեք պնդումներ հավասարումների համակարգերի համարժեքության մասին:

42. Ի՞նչ պայմանի դեպքում երկու անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգը, որում անհայտների գործակիցները համեմատական են

ա) լուծում չունի, բ) ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Կարելի՞ է արդյոք այդպիսի համակարգերը լուծել տեղադրման եղանակով:

43. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.
ա) $2x - 2y = x$ և $x - y = 0$;
բ) $3x - 5y = 0$ և $3x = 5y$;
գ) $3x - 6 + 2y = 0$ և $2 - x - 2y = 0$;
դ) $x + y - 5 = 0$ և $x = 5 - y$:

44. Ապացուցեք, որ հավասարումները համարժեք են.
ա) $2x - 3y + y = 4x - 2$ և $x + y = 1$;
բ) $5(x + y) + 1 = x + 3$ և $4x + 5y - 2 = 0$:

45. Կազմեք տված հավասարմանը համարժեք հավասարում.
ա) $4x - 2 + y = 0$; բ) $5x + 4y - 2 = 2x - 3y + 5$;
գ) $3x + 6y - 9 = 0$; դ) $x - y - 1 = 0$:

46. Համարժե՞ք են արդյոք երկու անհայտով հավասարումները, եթե նրանցից մեկի լուծումները նաև մյուսի լուծումներ են:

47. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումների համակարգերը.

ա) $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} x = y - 3, \\ 2(y - 3) + y - 4 = 0; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ 2x - 1 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 4x - 2y - 5 = 0, \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 4(2 - y) - 2y - 5 = 0, \\ x = 2 - y; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} y = 1 - x, \\ 5x - 4 = 0: \end{cases}$

48. Կազմեք տրված համակարգին համարժեք երկու համակարգեր.

ա) $\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0, \\ 3x + y - 2 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + y - 4 = 0, \\ -y = 5 - 2x: \end{cases}$

49. Ինչպիսի՞ a-ի դեպքում

$$\begin{cases} ax - y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} x - 2 = -y \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

համակարգերը համարժեք են:

50. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումների համակարգերը.

$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 5x + y - 6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y + 2 = 0, \\ 5x - 2y - 3 = 0: \end{cases}$

1.6. Երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը

Դիցուք տված է երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգ: Այդ հավասարումների աջ մասերի բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ մասերը և կատարելով նման անդամների միացում՝ կստանանք տված համակարգին համարժեք

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

համակարգը, որտեղ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2-ը որոշակի թվեր են:

Մենք արդեն գիտենք՝ ինչպես լուծել այդպիսի համակարգը, երբ անհայտների բոլոր a_1, b_1, a_2, b_2 գործակիցները զրոյից տարբեր են: Նաև գիտենք, որ եթե անհայտների գործակիցները համեմատական չեն, ապա (1) համակարգն ունի լուծում և այն միակն է, իսկ եթե անհայտների գործակիցները համեմատական են, ապա կամ գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ լուծումներ, կամ ոչ մի լուծում չկա:

Մեզ մնում է դիտարկել այն դեպքերը, երբ անհայտների որոշ գործակիցներ հավասար են զրոյի: Դիտարկենք օրինակներով:

Օրինակ 1. Լուծենք

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

հավասարումների համակարգը:

Այս համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ անհայտների գործակիցները զրոյից տարբեր են, իսկ առաջին հավասարման մեջ x-ի գործակիցը զրոյից տարբեր է, իսկ y-ի գործակիցը զրո է: Այդ համակարգը հեշտ է լուծել տեղադրման եղանակով: Առաջին հավասարումից գտնենք x-ը՝

$$x = -\frac{1}{3}$$

և տեղադրենք երկրորդի մեջ: Կստանանք՝

$$2\left(-\frac{1}{3}\right) + y - 5 = 0,$$

որտեղից՝ $y = 5\frac{2}{3}$:

Այսպիսով, $\left(-\frac{1}{3};\ 5\frac{2}{3}\right)$ թվազույգը (2) համակարգի միակ լուծումն է:

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases} 5x - 1 = 0, \\ 3y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(3) համակարգը (1) համակարգի մասնավոր դեպքն է, որտեղ

$$a_1 = 5, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = -1, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 3, \quad c_2 = 2:$$

Այդ համակարգի միակ լուծումը $\left(\frac{1}{5};\ -\frac{2}{3}\right)$ թվազույգն է:

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 2y + 3 = 0, \\ y + \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից ստանում ենք

$$y = -\frac{3}{2}:$$

Քանի որ (4) համակարգը մենք դիտարկում ենք որպես (1) համակարգի մասնավոր դեպք, որտեղ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ապա (4) համակարգը կարելի է գրառել այսպես՝

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 2y + 3 = 0, \\ 0 \cdot x + y + \dfrac{3}{2} = 0: \end{cases}$$

Այստեղ x-ը կարող է լինել ցանկացած թիվ, իսկ $y = -\dfrac{3}{2}$:

Այսպիսով, (4) համակարգի բոլոր լուծումները գրառվում են $\left(x; -\dfrac{3}{2}\right)$ թվազույգերի տեսքով, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

Օրինակ 4. Լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x - 5 = 0: \end{cases} \qquad (5)$$

Այս համակարգն անհամատեղ է (լուծում չունի), քանի որ x-ը միաժամանակ չի կարող հավասար լինել և՛ 2-ի, և՛ $\dfrac{5}{2}$-ի:

Օրինակ 5. Լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Եթե $c_2 \neq 0$, ապա այս համակարգն անհամատեղ է, որովհետև ոչ մի $(x; y)$ թվազույգ չի բավարարում (6) համակարգի երկրորդ հավասարմանը:

Եթե $c_2 = 0$, ապա երկրորդ հավասարումը դառնում է թվային ճիշտ հավասարություն՝ x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների համար: Մնում է միայն առաջին հավասարումը: Այն արդեն դիտարկվել է: Հետևաբար համակարգի լուծումներն առաջին հավասարման բոլոր լուծումներն են: Իսկ թե ինչպես լուծել այդպիսի հավասարումը, մենք արդեն գիտենք:

Առաջադրանքներ

51. Կարո՞ղ է արդյոք երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների համակարգը. ա) լուծում չունենալ, բ) ունենալ մեկ լուծում, գ) ունենալ անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Բերեք օրինակներ:

52. (2; 1) և (1; 2) թվազույգերից ո՞րն է հետևյալ համակարգի լուծում.

$$\begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0: \end{cases}$$

53. Պարզաբանել, թե տրված համակարգը ինչպիսի՞ն է.
1) անհամատեղ է, 2) անթիվ բազմությամբ լուծումներ ունի, 3) ունի միակ լուծում.

ա) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x + y = 9; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2: \end{cases}$

Լուծեք հավասարումների համակարգը (54-55).

54. ա) $\begin{cases} x = 3, \\ x + y - 4 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0, \\ x = -2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3x - y - 8 = 0, \\ y - 1 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0, \\ y = -5: \end{cases}$

55. ա) $\begin{cases} 4x + 4y = 2, \\ 2x + 2y = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3x + 3y = 6; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x - 4 = 2y: \end{cases}$

56. Կազմեք երկու գծային հավասարումների համակարգ, այնպիսին, որ նրա հավասարումներից մեկը լինի $3x - 4y = 2$ և.
ա) համակարգը լինի անհամատեղելի,
բ) համակարգն ունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (57-59).

57. ա) $\begin{cases} x - y = 5, \\ -4x + 4y = 20; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0, \\ 5x + 6y = 7; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y + 1 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 7x + 6y = 1{,}5, \\ 4x - 9y - 5 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3x + 4y = 3{,}5, \\ -3x - 4y = 40: \end{cases}$

58. ա) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y+4}{6}=2, \\ \dfrac{1}{3}(x+2)-y=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}+\dfrac{y}{5}+4=0, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2, \\ \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y+1}{4}=4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9}-\dfrac{x-y}{3}=2, \\ \dfrac{2x-y}{5}-\dfrac{3x+2y}{4}=-20; \end{cases}$

59. ա) $\begin{cases} x+5=5+3x, \\ x-3=9x+1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y+3=2y-4, \\ 2x+3=x; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 3y-4=2-3y, \\ y=\dfrac{11}{3}-3y; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x+y=x+y, \\ x-y+2=0; \end{cases}$

1.7.* Երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր[(1)]

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

հավասարումը, որտեղ a, b, c և d-ն տված թվեր են, ընդ որում a, b և c թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, անվանում են ***երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում:***

$(x_0; y_0; z_0)$ թվերի եռյակն անվանում են (1) ***հավասարման լուծում***, եթե այդ թվերը բավարարում են (1) հավասարմանը, այսինքն՝ (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0, y-ի փոխարեն՝ y_0, z-ի փոխարեն՝ z_0, (1) հավասարումը դառնում է թվային ճիշտ հավասարություն՝

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0: \qquad (2)$$

Նման կերպ սահմանվում են չորս, հինգ և այլն անհայտներով առաջին աստիճանի հավասարումը և նրա լուծումը:

Դիցուք՝ տրված են x, y և z երեք անհայտներով առաջին աստիճանի երեք հավասարումներ:

---

(1) *-ով նշված թեմաները նախատեսված չեն պարտադիր ուսուցման համար:

Ասում են, որ տրված է x, y և z երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք ***հավասարումների համակարգ,*** եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն $(x; y; z)$ թվերի եռյակները, որոնք միաժամանակ այդ երեք հավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումներն են: Այդպիսի եռյակներն անվանում են տվյալ ***համակարգի լուծումներ***:

Նման կերպ սահմանվում են երեքից ավելի անհայտներով առաջին աստիճանի նույն քանակով հավասարումների համակարգը և նրա լուծումը:

Լուծել հավասարումների համակարգը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

Մենք արդեն ուսումնասիրել ենք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգեր: Ցանկացած այդպիսի համակարգ կարելի է լուծել տեղադրման եղանակով: Բերենք երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների համակարգի օրինակ և ցույց տանք, որ այդպիսի համակարգերը նույնպես կարելի է լուծել տեղադրման եղանակով:

Օրինակ. Լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0, \\ x - y + z = 0: \end{cases} \qquad (3)$$

Լուծում: (3) համակարգի երրորդ հավասարումից x-ն արտահայտենք y-ով և z-ով՝

$$x = y - z, \qquad (4)$$

առաջին և երկրորդ հավասարումների մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $y - z$-ը: Կստանանք

$$\begin{cases} 2(y - z) - 3y + z - 1 = 0, \\ 3(y - z) - 4y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

հավասարումները, որոնք նման անդամների միացումից հետո կներկայացվեն այսպես՝

$$\begin{cases} -y - z - 1 = 0, \\ -y - 4z + 2 = 0: \end{cases} \qquad (5)$$

Այսպիսով, տեղադրման եղանակով կարելի է x, y և z երեք անհայտներով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների համակարգի լուծումը բերել y և z երկու անհայտներով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Լուծելով (5) համակարգը՝ գտնում ենք, որ $y = -2$, $z = 1$: y-ի և z-ի այս արժեքները տեղադրելով (4) արտահայտության մեջ՝ ստանում ենք՝

$$x = -3:$$

Այսպիսով, (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x = -3$, $y = -2$, $z = -1$:

Ընդհանուր դեպքում՝ x, y և z երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների համակարգեր լուծելիս կարելի է վարվել նույն կերպ, ինչպես բերված օրինակում:

Առաջադրանքներ

60. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարում:

բ) Ի՞նչն են անվանում երեք անհայտով առաջին աստիճանի հավասարման լուծում:

գ) Ի՞նչն են անվանում երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների համակարգի լուծում:

դ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել հավասարումը:

ե) Նկարագրեք երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների համակարգի լուծման տեղադրման եղանակը:

61 Լուծեք հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} x = 1, \\ 3x + 2y - 3z = 2, \\ 5x - y - 5z = -1; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 3y = 12, \\ x + y + z = 7, \\ x - 2y + 2z = -3; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x = 2y, \\ 3x - 2y - z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 8; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y + z = 6, \\ x - 5y + 3z = -4; \end{cases}$

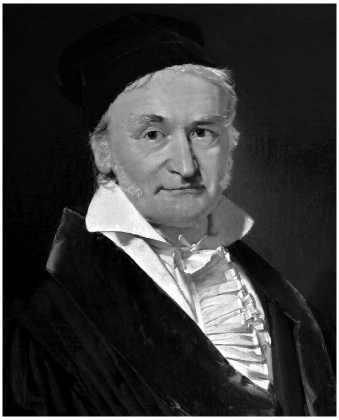
ե) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2; \end{cases}$

զ) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7, \\ x + 2y - z = 1, \\ 3x - 5y - 4z = 2; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 17, \\ x + y - z = 6, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$

ը) $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x - y + z = 3, \\ x + y - z = 3: \end{cases}$

1.8.* Գաուսի մեթոդը



Կարլ Գաուս (1777-1855)

Գծային հավասարումների համակարգեր լուծելիս մենք օգտվել ենք տեղադրման եղանակներից: Հավասարումների համակարգերի լուծման համար կիրառում են նաև, այսպես կոչված, ***Գաուսի մեթոդը,*** որն այդպես է անվանվել ի պատիվ գերմանացի նշանավոր մաթեմատիկոս Կարլ Գաուսի (1777-1855): Ստորև օրինակներով դիտարկվում է այդ մեթոդը:

Օրինակ 1. Լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ 2y + z = 7, \\ 5z = 15, \end{cases} \qquad (2)$$

Երրորդ հավասարումից գտնում ենք՝ $z = 3$: Երկրորդ հավասարման մեջ z-ի փոխարեն տեղադրելով 3, գտնում ենք՝ $y = 2$: Վերջապես, առաջին հավասարման մեջ z-ի փոխարեն տեղադրելով 3, իսկ y-ի փոխարեն՝ 2, գտնում ենք՝ $x = 1$: (2) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (1; 2; 3):

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումների համակխարգը.

$$\begin{cases} 3x - y + z + u = 11, \\ 2y - z + 2u = -9, \\ z - u = 5, \\ 2u = -4: \end{cases} \qquad (3)$$

Չորրորդ հավասարումից գտնում ենք՝ $u = -2$, երրորդից՝ $z = 3$, երկրորդից՝ $y = -1$, առաջինից՝ $x = 3$: (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝ (3; –1; 3; 2):

(1), (2) և (3) տեսքի հավասարումների համակարգերն անվանում են «եռանկյունաձև» տեսքի համակարգեր: Այդպիսի համակարգերը հեշտ է լուծել՝ սկսելով վերջին հավասարումից, այնուհետև՝ անցնելով նախավերջինին և այլն:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ սկզբում համակարգը բերվում է «եռանկյունաձև» տեսքի, այնուհետև լուծվում է այնպես, ինչպես ցույց տրվեց վերևում: Ցուցադրենք օրինակով:

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ 2x - 5y + 4z = -8, \\ 3x + 4y - 2z = 12: \end{cases} \left|\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ \\ 1 \end{array}$$

Առաջին հավասարման օգնությամբ երկրորդ և երրորդ հավասարումներից արտաքսենք z-ը: Դրա համար առաջին հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք 4-ով (գծիկից աջ նշված թիվը ցույց է տալիս, որ համապատասխան հավասարումը բազմապատկվում է այդ թվով) և ստացված հավասարումը գումարենք երրորդ հավասարմանը: Կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ -18x + 7y = -36, \\ 13x - 2y = 26: \end{cases} \quad \left|\begin{array}{c} \\ 2 \\ 7 \end{array}\right.$$

Այժմ երկրորդ հավասարման օգնությամբ երրորդ հավասարումից արտաքսենք y-ը: Դրա համար երկրորդ հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք 2-ով, իսկ երրորդ հավասարման երկու մասերը՝ 7-ով և գումարենք ստացված հավասարումները: Արդյունքում ստացված հավասարումը գրենք երրորդ հավասարման փոխարեն: Կստանանք

$$\begin{cases} -5x + 3y - z = -7, \\ -18x + 7y \quad = -36, \\ 55x \qquad\quad = 110: \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը, որն ունի «եռանկյունաձև» տեսք: Այդ համակարգի (2; 0; –3) լուծումը դժվար չէ գտնել:

Առաջադրանքներ

62. Լուծեք «եռանկյունաձև» տեսքի հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} z = 2, \\ 4y - 3z = 2, \\ 3x + 4y - 6z = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x = -6, \\ 3x - y = 0, \\ -x + y - z = -6; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} -x + y + z = 5, \\ 4x - 3y = 5, \\ 3x = 15. \end{cases}$

63. Հավասարումների համակարգը լուծեք Գաուսի եղանակով.

ա) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 3y - 4z = 7, \\ 3x - 4y + 5z = 2. \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + y - z = -1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ -x + 5y - 3z = -3; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} -3x + 5y - 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 6, \\ 4x + 2y - 5z = 1; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y - z = 1, \\ -x + y + z = -1; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ -x + 3y - z = 2; \end{cases}$

զ) $\begin{cases} -2x + 7y - 4z = 1, \\ 4x - 8y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 4z = 1; \end{cases}$ է) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 3, \\ x + 3y + 2z = 3, \\ 2x + y + 3z = 2: \end{cases}$

1.9. Երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգի լուծման գրաֆիկական (երկրաչափական) մեկնաբանությունը

Մենք արդեն ծանոթ ենք երկու անհայտով առաջին աստիճանի երկու հավասարումների լուծման եղանակներին, որոնք առանձնակի դժվարություն չեն առաջացնում: Ստորև մենք կծանոթանանք այդպիսի համակարգերի լուծման գրաֆիկական եղանակին, դրանով իսկ ավելի կարևոր ենք համարում տեղեկանալ լուծման երկրաչափական մեկնաբանությանը: «Երկրաչափական» բառը կապված է այն բանի հետ, որ համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրն ուղղի հավասարում է (այստեղ ենթադրվում է, որ անհայտների գործակիցներից գոնե մեկը 0 չէ):

Օրինակ 1. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

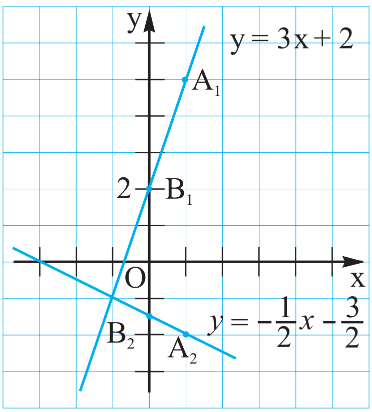
Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ն արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (1)-ին համարժեք

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

համակարգը: Հարթության վրա ներմուծենք $x0y$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը: $y = 3x + 2$ հավասարումը $A_1(1;\ 5)$ և $B_1(0;\ 2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է, իսկ

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\text{-ը՝ } A_2(1;\ -2)$$

և $B_2\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:



Նկ. 1

$x0y$ կոորդինատային համակարգում կառուցենք այդ ուղիղները (նկ. 1): Ինչպես երևում է, դրանք հատվում են $(-1; -1)$ կետում: Այդ կետի $x = -1$, $y = -1$ կոորդինատներն էլ հենց (2) համակարգի միակ լուծումն են կազմում և, հետևաբար, նրան համարժեք (1) համակարգի լուծումը: Տեղադրելով x-ի և y-ի գտած արժեքները (1) համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման մեջ՝ լիովին համոզվում ենք դրանում:

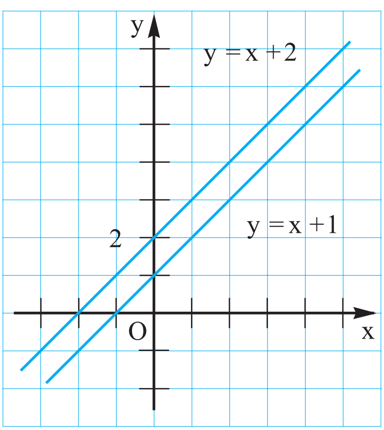
Օրինակ 2. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

հավասարումների համակարգը:

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ը արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (3)-ին համարժեք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2 \end{cases} \tag{4}$$



Նկ. 2

(4) համակարգի հավասարումները զուգահեռ ուղիղների հավասարումներ են, որովհետև նրանց անկյունային գործակիցները հավասար են: Այդ ուղիղները չեն համընկնում, որովհետև Oy առանցքը հատում են տարբեր կետերում՝ առաջինը $(0;\ 1)$ կետում, իսկ երկրորդը՝ $(0;\ 2)$ կետում (նկ. 2): Այսպիսով այդ ուղիղները չեն հատվում, ուստի (4) համակարգը և հետևաբար նրան համարժեք (3) համակարգը լուծում չունի:

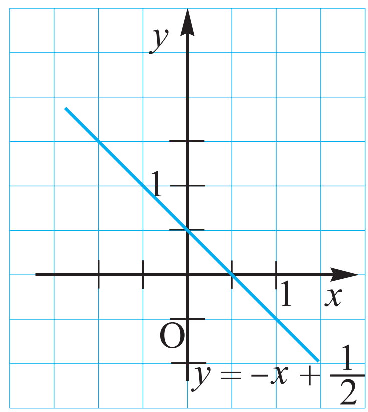
Օրինակ 3. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ -4x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Համակարգի յուրաքանչյուր հավասարումից y-ն արտահայտելով x-ով՝ ստանում ենք (5)-ին համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y = -x + 0{,}5, \\ y = -x + 0{,}5 \end{cases} \qquad (6)$$

Այս համակարգի հավասարումները նույնն են, հետևաբար դրանցով տրվում է միևնույն ուղիղը՝ $y = -x + 0{,}5$ (նկ. 3): Դա ցույց է տալիս, որ (5) համակարգի բոլոր լուծումները $y = -x + 0{,}5$ ուղղին պատկանող բոլոր $(x; y)$ կետերի կոորդինատներն են: Հետևաբար, (5) համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ $(x; -x + 0{,}5)$, որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:



Նկ. 3

Այսպիսով, գծային հավասարումների համակարգը գրաֆիկական եղանակով լուծելու համար անհրաժեշտ է՝

1) յուրաքանչյուր հավասարումը լուծել y-ի նկատմամբ,
2) կոորդինատային հարթության վրա պատկերել ստացված հավասարումներին համապատասխան ուղիղները:

Եթե ուղիղները հատվում են, ապա նրանց հատման կետի կոորդինատներից բաղկացած թվազույգը կլինի համակարգի լուծումը:

Եթե ուղիղները զուգահեռ լինեն, ապա համակարգը լուծում չունի:

Եթե ուղիղները համընկնեն, ապա համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ այդ ուղղին պատկանող բոլոր կետերի կոորդինատների թվազույգերը:

Խնդիր: Գնացքը, $t_0 = 0$ պահին դուրս գալով O կայարանից, գնում է 100 կմ/ժ արագությամբ: Նրան ընդառաջ նույն $t_0 = 0$ պահին A կայարանից դուրս է գալիս երկրորդ գնացքը՝ 80 կմ/ժ արագությամբ:

O-ից A հեռավորությունը 200 կմ է: Կառուցել այդ գնացքների շարժման գրաֆիկները և դրանց օգնությամբ որոշել՝ երբ և O կայարանից ինչ հեռավորության վրա գնացքները կհանդիպեն:

Լուծում: Ներմուծենք tOs ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը (նկ. 4): Կհամարենք, որ t-ի առանցքը 1 սմ-ին համապատասխանում է 1 ժամ, իսկ s-ի առանցքի 1 սմ-ին՝ 100 կմ:

Os առանցքի վրա նշենք $S = 200$ օրդինատն ունեցող A կետը:

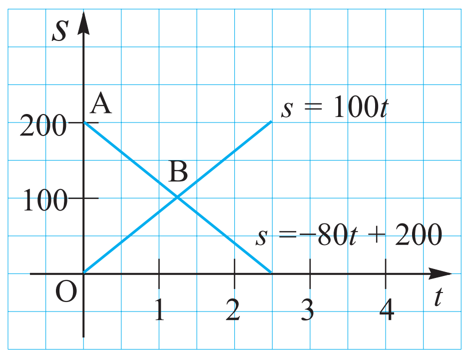
Հարմարության համար ընդունենք, որ առաջին գնացքը O կետից շարժվում է Os առանցքի դրական ուղղությամբ, իսկ երկրորդը՝ A կետից այդ առանցքի բացասական ուղղությամբ: Այդ դեպքում առաջին գնացքի շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$S = 100\,t \tag{7}$$

բանաձևով, իսկ երկրորդ գնացքի շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$S = -80t + 200 \tag{8}$$

բանաձևով: Արագությունը t-ի գործակիցն է: Առաջին գնացքի համար այն դրական է, իսկ երկրորդի համար՝ բացասական: Բացի այդ, $t = 0$ դեպքում առաջին գնացքը Os առանցքի վրա ունի $S = 0$ օրդինատը, իսկ երկրորդը՝ $S = 200$ օրդինատը, ինչը և համապատասխանում է (7) և (8) հավասարումներին: Նկ. 4-ում պատկերված են այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները ներկայացնող ուղիղները: Գնացքների հանդիպումը կկայանա այնպիսի t պահի, երբ այդ գրաֆիկների կետերի օրդինատները հավասարվեն միևնույն s թվին: Բայց այդ t և s թվերը միաժամանակ պետք է բավարարեն (7) և (8) հավասարումներին, այսինքն՝ պետք է լինեն այդ ուղիղների հատման B կետի կոորդինատները: Նկարից երևում է, որ B կետի կոորդինատները մոտավորապես հավասար են՝ $t \approx 1{,}1$ $s \approx 110$: Համեմատելու համար լուծենք



Նկ. 4

$$\begin{cases} s = 100t, \\ s = -80t + 200 \end{cases}$$

հավասարումների համակարգը: Կստանանք՝

$$t = \frac{10}{9} \text{ ժամ} \approx 66{,}66 \ldots \text{ րոպե} \approx 67 \text{ րոպե:}$$

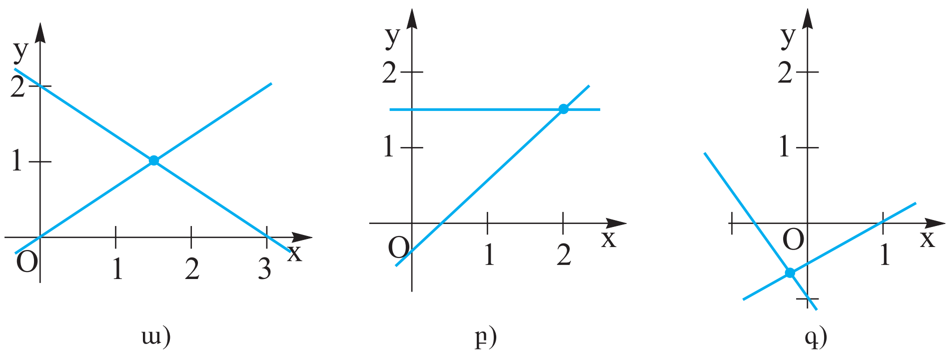
$$S = 100 \cdot \frac{10}{9} \text{ կմ} \approx 111{,}11 \text{ կմ} \approx 111 \text{ կմ:}$$

Այսպիսով, գնացքները կհանդիպեն մոտավորապես 67 րոպե հետո, O-ից մոտավորապես 111 կմ հեռավորության վրա:

Առաջադրանքներ

64. Ինչպե՞ս լուծել գծային հավասարումների համակարգը գրաֆիկական եղանակով:

65. Աչքաչափով որոշեք նկ. 5-ում պատկերված ուղիղների հատման կետերի կոորդինատները:



Նկ. 5

66. Գտեք ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y = 2x - 7$; բ) $y = -x - 2$;

գ) $y = \frac{1}{7} - 2x$; դ) $y = -\frac{1}{3} - 0{,}2x$:

67. Որոշեք ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y = x + 4$ և $y = 3x$; բ) $y = -2$ և $y = 7x + 1$;

գ) $y = 2 - 3x$ և $y = 5x - 4$:

68. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկական եղանակով.

ա) $\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x - 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = 2 - x; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y + x = 1; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ 14x - 2y + 5 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 3x + y - 1 = 0, \\ 6x + 2y - 2 = 0: \end{cases}$

69. Կոորդինատային առանցքների հետ հատվու՞մ է արդյոք $ax + by + c = 0$ ուղիղը, եթե a և b թվերը զրոյից տարբեր են:

70. Ի՞նչ հավասարում ունի ուղիղը, որը զուգահեռ է.

ա) Ox առանցքին,

բ) Oy առանցքին:

71. a, b և c-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $ax + by + c = 0$ ուղիղը
ա) հատում է կոորդինատային առանցքները,
բ) զուգահեռ է Ox առանցքին,
գ) զուգահեռ է Oy առանցքին:

72. Որոշեք՝ քանի՞ լուծում ունի հավասարումների համակարգը և տվեք երկրաչափական մեկնաբանություն.

ա) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ y = 5; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 4x - 0{,}3y = 5; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + 4y = 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 0{,}3x + 1\dfrac{1}{7}y = 5, \\ -0{,}15x - \dfrac{4}{7}y = -2\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 3\dfrac{1}{3}x - 2{,}2y = 0, \\ 10x - 6{,}6y = 1: \end{cases}$

73. Հավասարումների համակարգն ունի՞ լուծում: Պատասխանը լուսաբանեք գրաֆիկների օգնությամբ.

ա) $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5x - 4y = 1; \\ 20x - 16y = -4; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \dfrac{1}{2}x + y = 2; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}13y = 2, \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{13y}{30} = \dfrac{2}{7}: \end{cases}$

74. Գտեք k-ն, եթե $y = kx$ ուղիղն անցնում է այն կետով, որի կոորդինատները հավասարումների տրված համակարգի լուծումն են.

ա) $\begin{cases} x + 2y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + y = 3: \end{cases}$

75. Ապացուցեք, որ հավասարումների համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ.

ա) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 2y = 6; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 0{,}5x + 0{,}5y = 1: \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}9 = 0, \\ -3x - 2y = 9; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{2x}{3} - 6 = -\dfrac{2y}{3}: \end{cases}$

76. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x + y = -b$ և $x - ay = 2$ ուղիղները.
ա) հատվում են (1; 4) կետում,
բ) զուգահեռ են,
գ) համընկնում են:

77. Կազմեք հավասարումների համակարգ, որի լուծումը տված թվազույգն է.

ա) (3; –1);

բ) (1; 3);

գ) (5; –2);

դ) (0; 3):

❖ **78.** Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկական եղանակով.

ա) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y + 1 = 0, \\ y = 2; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 5, \\ x + y = 2; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{2}{3} = 0, \\ 2x + 2y - 4 = 0: \end{cases}$

1.10. Խնդիրների լուծում առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգերի օգնությամբ

Խնդիր 1 *(հնագույն խնդիր)*. Հանդիպեցին երկու հովիվ՝ Հովհաննեսը և Պետրոսը: Հովհաննեսն ասում է Պետրոսին. «Տուր ինձ մի ոչխար, և ինձ մոտ կլինի երկու անգամ ավելի ոչխար, քան քեզ մոտ»: Իսկ Պետրոսը նրան պատասխանում է. «Ո՛չ. ավելի լավ է դու ինձ տուր մի ոչխար, և մեզ մոտ կլինեն հավասար թվով ոչխարներ»: Քանի՞ ոչխար ուներ նրանցից յուրաքանչյուրը:

Լուծում: Դիցուք՝ Հովհաննեսն ուներ x ոչխար, իսկ Պետրոսը՝ y ոչխար: Եթե Պետրոսը Հովհաննեսին տար մեկ ոչխար, ապա Պետրոսի մոտ կմնար $(y - 1)$ ոչխար, իսկ Հովհաննեսի մոտ կլիներ $(x + 1)$ ոչխար:

Քանի որ այդ դեպքում Հովհաննեսի մոտ երկու անգամ շատ ոչխար կլիներ, քան Պետրոսի մոտ, ուստի

$$x + 1 = 2(y - 1): \tag{1}$$

Իսկ եթե Հովհաննեսը Պետրոսին մեկ ոչխար տար, ապա Հովհաննեսի մոտ կմնար $(x - 1)$ ոչխար, իսկ Պետրոսի մոտ կդառնար $(y + 1)$ ոչխար: Բայց այդ դեպքում նրանք կունենային հավասար թվով ոչխարներ: Հետևաբար

$$x - 1 = y + 1: \tag{2}$$

Անհրաժեշտ է գտնել x-ի և y-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարեն (1) և (2) հավասարումներին: Այլ կերպ ասած, անհրաժեշտ է լուծել երկու անհայտով գծային երկու հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x + 1 = 2(y - 1), \\ x - 1 = y + 1: \end{cases} \tag{3}$$

Լուծենք այս համակարգը տեղադրման եղանակով: Առաջին հավասարումից x-ը արտահայտենք y-ով՝

$$x = 2y - 3: \tag{4}$$

Համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ տեղադրելով x-ի փոխարեն $2y - 3$, կստանանք մեկ՝ y փոփոխականով հավասարում՝

$$(2y - 3) - 1 = y + 1,$$

որն ունի միակ լուծում՝ $y = 5$: Տեղադրելով $y = 5$ արժեքը (4) հավասարման մեջ, գտնում ենք՝ $x = 7$: Հետևաբար (3) համակարգն ունի միակ լուծում՝ $x = 7$, $y = 5$:

Պատ.՝ Հովհաննեսն ունի 7 ոչխար, իսկ Պետրոսը՝ 5 ոչխար:

Խնդիր 2. A վայրից B վայր մեկնեց հեծանվորդը, իսկ քառորդ ժամ հետո նրա հետևից նույն ուղղությամբ շարժվեց ավտոմեքենան: A-ից B ճանապարհի մեջտեղում ավտոմեքենան հասավ հեծանվորդին: Երբ մեքենան հասավ B վայր, հեծանվորդին դեռ մնում էր անցնելու ճանապարհի $\frac{1}{3}$ մասը: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեցին հեծանվորդը և ավտոմեքենան A-ից B ճանապարհի վրա, եթե հայտնի է, որ նրանց արագությունները հաստատուն են:

Լուծում: Դիցուք՝ հեծանվորդը A-ից B ճանապարհն անցել է x րոպեում, իսկ ավտոմեքենան՝ y րոպեում: A-ից B ճանապարհի կեսի վրա հեծանվորդը ծախսել է $\frac{1}{2}x$ րոպե, իսկ ավտոմեքենան՝ $\frac{1}{2}y$ րոպե: Ըստ պայմանի՝

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 15: \qquad (5)$$

Մյուս կողմից, ավտոմեքենայի B վայրը հասնելու պահին հեծանվորդը ($y + 15$) րոպե գտնվում էր ճանապարհին և անցել էր ճանապարհի $\frac{2}{3}$ մասը, այսինքն՝ ծախսել էր $\frac{2}{3}x$ րոպե, հետևաբար

$$y + 15 = \frac{2}{3}x: \qquad (6)$$

Անհրաժեշտ է գտնել x-ի և y-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարեն (5) և (6) հավասարումներին: Այլ կերպ ասած, պետք է լուծել երկու անհայտով երկու գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + 15 = \frac{1}{2}x, \\ y + 15 = \frac{2}{3}x: \end{cases}$$

Առաջին հավասարման ձախ և աջ մասերը բազմապատկելով 2-ով, իսկ երկրորդ հավասարման ձախ և աջ մասերը՝ 3-ով՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} y + 30 = x, \\ 3y + 45 = 2x \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այդ համակարգը, կստանանք նրա միակ լուծումը՝ $x = 45$, $y = 15$:

Պատ.՝ A-ից B ճանապարհի վրա հեծանվորդը ծախսել է 45 րոպե, իսկ ավտոմեքենան՝ 15 րոպե:

❖ **Խնդիր 3.** Դասագիրք, գրիչ և օրագիր գնելու համար աշակերտը ծախսեց 1400 դրամ: Եթե դասագիրքը 5 անգամ էժան լիներ, գրիչը՝ 2 անգամ էժան, օրագիրը՝ 2,5 անգամ էժան, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 400 դրամ: Իսկ եթե սկզբնական արժեքի հետ համեմատած՝ դասագիրքը 3 անգամ էժան լիներ, գրիչը՝ 4 անգամ, իսկ օրագիրը՝ 2 անգամ, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 500 դրամ Որքա՞ն արժեն դասագիրքը, գրիչը և օրագիրը:

Լուծում: Դիցուք՝ դասագիրքն արժե x դրամ, գրիչը՝ y դրամ, իսկ օրագիրը՝ z դրամ:

Առաջին հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ դրանց գնման համար ծախսվել է 1400 դրամ՝

$$x + y + z = 1400:$$

Երկրորդ հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ եթե դասագիրքն արժենար $\frac{1}{5}x$ դրամ, գրիչը՝ $\frac{1}{2}y$ դրամ, օրագիրը՝ $\frac{1}{2,5}z$ դրամ, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 400 դրամ ՝

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 400:$$

Վերջապես, երրորդ հավասարումը կազմենք այն պայմանից, որ եթե դասագիրքն արժենար $\frac{1}{3}x$ դրամ, գրիչը՝ $\frac{1}{4}y$ դրամ, օրագիրը՝ $\frac{1}{2}z$ դրամ, ապա դրանց գնման համար կծախսվեր 500 դրամ ՝

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 500:$$

Պահանջվում է գտնել x, y և z-ի այնպիսի արժեքներ, որոնք միաժամանակ բավարարեն այդ երեք հավասարումներին: Այլ խոսքով, անհրաժեշտ է լուծել երեք անհայտով առաջին աստիճանի երեք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x + y + z = 1400, \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2,5}z = 400, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 500: \end{cases} \qquad (7)$$

Երկրորդ հավասարման երկու մասը բազմապատկելով 10-ով, իսկ երրորդ հավասարման երկու մասը՝ 12-ով՝ կստանանք

$$\begin{cases} x + y + z = 1400, \\ 2x + 5y + 4z = 4000, \\ 4x + 3y + 6z = 6000 \end{cases}$$

համակարգը: Առաջին հավասարումից z-ն արտահայտենք x և y-ով՝

$$z = 1400 - z - y \qquad (8)$$

և համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումներում z-ի փոխարեն տեղադրենք $140 - x - y$ արտահայտությունը: Կստանանք երկու անհայտով երկու հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4(1400 - x - y) = 4000, \\ 4x + 3y + 6(1400 - x - y) = 6000: \end{cases}$$

Լուծելով ստացված համակարգը՝ ստանում ենք նրա միակ լուծումը՝

$$x = 900,\ y = 200:$$

Տեղադրելով $x = 900$, $y = 200$ թվերը (8) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$z = 300:$$

Հետևաբար համակարգն ունի միակ լուծում՝

$$x = 900,\ \ y = 200,\ z = 300:$$

Պատ.՝ Դասագիրքն արժե 900 դրամ, գրիչը՝ 200 դրամ, օրագիրը՝ 300 դրամ:

Առաջադրանքներ

79. ա) Երկու թվերի գումարը 10 է, իսկ տարբերությունը՝ 4: Գտեք այդ թվերը:
բ) Երկու թվերի գումարը 21 է, իսկ տարբերությունը՝ 9: Գտեք այդ թվերը:

80. ա) Մի թիվը 6-ով մեծ է մյուսից: Այդ թվերի գումարը հավասար է 40-ի: Գտեք այդ թվերը:
բ) Մի թիվը 15-ով փոքր է մյուսից: Գտեք այդ թվերը, եթե նրանց գումարը 23 է:

81. ա) Մի թիվը 2 անգամ մեծ է մյուսից: Եթե այդ թվերից փոքրը մեծացվի 4 անգամ, իսկ մեծը՝ 2 անգամ, ապա նրանց գումարը հավասար կլինի 44: Գտեք այդ թվերը:

բ) Մի թիվը 3 անգամ փոքր է մյուսից: Եթե այդ թվերից մեկը մեծացվի 2 անգամ, ապա նրանց գումարը հավասար կլինի 42: Գտեք այդ թվերը: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը: Ինչպե՞ս պետք է փոխել խնդրի ձևակերպումը, որպեսզի լուծումը լինի միակը:

82. ա) Մի թիվը 7-ով մեծ է մյուսից: Եթե փոքր թիվը մեծացվի 2 անգամ, իսկ մեծը՝ 6 անգամ, ապա նրանց գումարը կդառնա 31: Գտեք այդ թվերը:
բ) Մի թիվը 10-ով փոքր է մյուսից: Եթե մեծ թիվը փոքրացվի 3 անգամ, ապա նրանց գումարը կդառնա 70: Գտեք այդ թվերը:

83. ա) Տված են երկու թվեր: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 2-ով, ապա ստացված թիվը 1-ով մեծ կլինի երկրորդից, իսկ եթե երկրորդ թիվը բազմապատկենք 2-ով, ապա ստացված թիվը 7-ով մեծ կլինի առաջինից: Գտեք այդ թվերը:
բ) Տված են երկու թվեր: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 4-ով, ապա կստացվի երկրորդից 6-ով մեծ թիվ, իսկ եթե երկրորդը բազմապատկենք 3-ով, ապա կստացվի առաջինից 1,5-ով փոքր թիվ: Գտեք այդ թվերը:

84. ա) Մի բնակավայրից մյուսը կարելի է գնալ գյուղամիջյան ճանապարհով կամ մայրուղով: Գյուղամիջյան ճանապարհը 5 կմ-ով կարճ է մայրուղուց, իսկ դրանք միասին կազմում են 61 կմ: Որքա՞ն է գյուղամիջյան ճանապարհի երկարությունը:

բ) Գյուղից քաղաք տանում են երկու ճանապարհ՝ հողածածկ և ասֆալտապատ: Հողածածկ ճանապարհը 18 կմ-ով երկար է ասֆալտապատ ճանապարհից, իսկ նրանց երկարությունների գումարը 66 կմ է: Որքա՞ն է հողածածկ ճանապարհի երկարությունը:

85. Մի հերթափոխում խառատային նոր հաստոցով 30 դետալ ավելի է մշակվում, քան հին հաստոցով: Ընդ որում՝ մի հերթափոխում հինգ նոր հաստոցներով կարելի է մշակել այնքան դետալ, որքան ութ հին հաստոցներով: Որքա՞ն դետալ է մշակվում նոր հաստոցով:

86. Եթե մի վայրից միաժամանակ և նույն ուղղությամբ մեկնեն մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը, ապա 1 ժամ հետո մոտոցիկլավարը հեծանվորդից 33 կմ առաջ կանցնի: Իսկ եթե այդ վայրից նրանք միաժամանակ դուրս գան հակառակ ուղղություններով, ապա 1 ժամ հետո նրանց միջև կլինի 57 կմ հեռավորություն:Գտեք դրանց արագությունները:

87. Դպրոցականները էքսկուրսիա գնացին: Նրանք վերադարձան այլ ճանապարհով, որը 7 կմ-ով կարճ էր առաջինից: Որքա՞ն է յուրաքանչյուր ճանապարհի երկարությունը, եթե դպրոցականներն անցան ընդամենը 41 կմ:

88. 52 սմ պարագծով ուղղանկյան երկու կողմերի տարբերությունը 4 սմ է: Գտեք ուղղանկյան կողմերը:

89. 30 աշակերտից բաղկացած դասարանի համար գնեցին 1000 և 1500 դրամանոց թատրոնի տոմսեր: Առանձին-առանձին տարբեր արժեքի քանի՞ տոմս են գնել, եթե դրանց ընդհանուր արժեքը կազմել է 35000 դրամ:

90. Դպրոցը ձեռք բերեց 4 բազկաթոռ և 2 սեղան, դրանց համար վճարելով 62000 դրամ: Եթե գնվեր 2 բազկաթոռ և 3 սեղան, ամբողջ գնումը 17000 դրամով պակաս կլիներ: Առանձին-առանձին որքա՞ն արժեն բազկաթոռը և սեղանը:

91. Գնումներ կատարելուց հետո տղան ստացավ 700 դրամ մանրոն՝ 50 և 10 դրամանոց մետաղադրամներով: Ընդամենը նա ստացավ 10 մետաղադրամ: Քանի՞ 50 դրամանոց նա ստացավ:

92. Երկնիշ թիվը 5 անգամ մեծ է իր թվանշանների գումարից: Եթե այդ թիվը մեծացվի 9-ով, ապա ստացված թիվը 6 անգամ մեծ կլինի սկզբնական երկնիշ թվի թվանշանների գումարից: Գտեք սկզբնական երկնիշ թիվը:

93. Երկու բնական թվերի գումարը 31 է, իսկ տարբերությունը՝ 5: Գտեք այդ թվերը:

94. Միևնույն գործվածքեղենի երկու փաթեթներ միասին արժեն 91000 դրամ: Երբ առաջին փաթեթից վաճառեցին այնքան, որքան սկզբում երկրորդ փաթեթում էր, իսկ երկրորդից՝ առաջին փաթեթում սկզբում եղածի կեսի չափ, ապա առաջին փաթեթում 10 մ-ով ավելի մնաց, քան երկրորդում: Քանի՞ մետր գործվածք կար փաթեթներից յուրաքանչյուրում, եթե գործվածքի 1 մ-ն արժե 1400 դրամ:

95. Դպրոցականների երկու բրիգադ արտադրական պրակտիկայի ընթացքում միասին վաստակեց 117000 դրամ: Առաջին բրիգադը աշխատել էր 15 օր, երկրորդը՝ 14 օր: Որքա՞ն էր վաստակում բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում, եթե առաջինը 4 օրում վաստակել է 11000 դրամով ավելի, քան երկրորդը՝ 3 օրում:

96. Դպրոցական բուֆետ բերեցին 300 հրուշակ և բուլկի, 20 կգ ընդհանուր զանգվածով: Բոլոր հրուշակների զանգվածը այնքան է, որքան բոլոր բուլկիների զանգվածը: Քանի՞ հրուշակ և քանի՞ բուլկի են բերել, եթե մեկ հրուշակի զանգվածը 100 գ է, իսկ մեկ բուլկու զանգվածը՝ 50 գ:

97. Մի թվի 5%-ը և մյուս թվի 4%-ը միասին կազմում են 46, իսկ առաջին թվի 4%-ը և երկրորդ թվի 5%-ը միասին կազմում են 44: Գտեք այդ թվերը:

98. Մի թվի 20%-ը և մյուս թվի 50%-ը միասին կազմում են 27, իսկ առաջին թվի 50%-ը և երկրորդ թվի 50%-ը միասին կազմում են 42,3: Գտեք այդ թվերը:

99. Եռանկյան մեծ կողմը 16 սմ է, իսկ մյուս երկու կողմերի տարբերությունը՝ 0,4 դմ: Ինչի՞ են հավասար եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 0,38 մ է:

100. Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե նրա պարագիծը 0,9 մ է, մեծ կողմը 10 սմ-ով փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից, իսկ փոքր կողմի եռապատիկը 2 սմ-ով մեծ է մյուս երկու կողմերի գումարից:

101. Եռանկյան պարագիծը 16 դմ է: Մեծ կողմը 25 սմ-ով մեծ է փոքր կողմից, իսկ երկարությամբ միջին կողմի կրկնապատիկը 1 սմ-ով փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից: Գտեք եռանկյան կողմերը:

102. Երկնիշ թվի թվանշանների գումարը 6 է: Եթե այդ թվի թվանշանները տեղափոխենք, ապա կստացվի մի թիվ, որը կազմում է սկզբնական թվի $\frac{4}{7}$ մասը: Գտեք երկնիշ թիվը:

103. ***Բհասկարայի խնդիրը*** (Հնդկաստան, XIIդ.): Մեկն ասաց ընկերոջը. «Տուր ինձ 100 ռուփի (դրամական միավոր է), և ես երկու անգամ քեզնից հարուստ կլինեմ»: Ընկերը պատասխանեց. «Տուր ինձ միայն 10 ռուփի, և ես 6 անգամ քեզնից հարուստ կդառնամ»: Որքա՞ն կար յուրաքանչյուրի մոտ:

104. Երեք բադ և չորս սագ միասին կշռում են 2 կգ 500 գ, իսկ չորս բադ և երեք սագ միասին կշռում են 2 կգ 400 գ: Որքա՞ն է կշռում 1 սագը:

❖ **105.** Երեք տարաներում միասին կար 54 լ ջուր: Եթե առաջինից երկրորդի մեջ լցնենք 4 լ, ապա այդ երկու տարաներում ջրի քանակությունը հավասար կլինի, իսկ եթե երրորդ տարայից երկրորդի մեջ լցնենք 17 լ, ապա երկրորդում չորս անգամ ավելի ջուր կլինի, քան երրորդում: Որքա՞ն ջուր կար յուրաքանչյուր տարայում:

❖ **106.** ա) Արամն ու Բաբկենը միասին կշռում են 82 կգ, Արամն ու Գագիկը՝ 83 կգ, Բաբկենն ու Գագիկը՝ 85 կգ: Երեքով միասին քանի՞ կգ են կշռում:

բ) *Հնագույն խնդիր:* Չորս առևտրական ունեն որոշակի գումար: Հայտնի է, որ առանց առաջինի, նրանց մոտ եղած գումարը 9000 դրամ է, առանց երկրորդի՝ 8500 դրամ, առանց երրորդի՝ 8000 դրամ, առանց չորրորդի՝ 7500 դրամ: Քանի՞ դրամ ուներ նրանցից յուրաքանչյուրը:

գ) *Հնագույն խնդիր:* Հայրն ունի յոթ որդի: Առաջին և չորրորդ որդիների տարիքների գումարը 9 է, առաջինի և վեցերորդի՝ 8, երկրորդի և հինգերորդի՝ 8, երկրորդի և երրորդի՝ 9, երրորդի և վեցերորդի՝ 6, չորրորդի և յոթերորդի՝ 4, իսկ յոթերորդի և հինգերորդի՝ նույնպես 4: Քանի՞ տարեկան է նրանցից յուրաքանչյուրը:

❖ **107.** Երեք տղաների բաժանեցին 145 ընկույզ: Առաջին տղայի ստացած ընկույզների քանակի կեսը հավասար է երկրորդ տղայի ստացած ընկույզների քանակի $\frac{2}{3}$-ին և երրորդի ստացած ընկույզների քանակի $\frac{3}{4}$-ին: Որքա՞ն ընկույզ է ստացել տղաներից յուրաքանչյուրը:

❖ **108.** Երեք տարաներում միասին կար 36 լ ջուր: Առաջին տարայից նրանում եղած ջրի կեսը լցրին երկրորդ տարայի մեջ, այնուհետև երկրորդում ստացված ջրի $\frac{1}{3}$ մասը լցրին երրորդի մեջ, և վերջապես, երրորդում ստացված ջրի $\frac{1}{4}$ մասը լցրին առաջինի մեջ: Արդյունքում բոլոր երեք տարաներում ջրի քանակությունը նույնը եղավ: Սկզբում որքա՞ն ջուր կար յուրաքանչյուր տարայում:

❖ **109.** ա) Եթե ճանապարհի $\frac{1}{3}$-ը զբոսաշրջիկն անցնի ոտքով, իսկ $\frac{2}{3}$-ը հեծանվով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 1,5 ժամ: Իսկ եթե ճանապարհի $\frac{1}{3}$-ը անցնի հեծանվով, իսկ $\frac{2}{3}$-ը՝ ոտքով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 2 ժամ 15 րոպե: Որքա՞ն ժամանակում ամբողջ ճանապարհը նա կանցնի ոտքով:

բ) Եթե ավազանի $\frac{1}{4}$ -ը լցնի առաջին խողովակը, իսկ այնուհետև $\frac{3}{4}$ մասը՝ երկրորդը, ապա ավազանը կլցվի 5 ժ-ում: Իսկ եթե ավազանի $\frac{3}{4}$ մասը լցնի առաջին խողովակը, իսկ այնուհետև $\frac{1}{4}$ մասը՝ երկրորդը, ապա ավազանը կլցվի 7 ժամում: Միայն երկրորդ խողովակը քանի՞ ժամում կլցնի ավազանը:

գ) Եթե ճանապարհի $\frac{2}{5}$ մասը զբոսաշրջիկն անցնի գնացքով, իսկ $\frac{3}{5}$ մասը՝ ավտոբուսով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա նա կծախսի 4 ժամ: Իսկ եթե ճանապարհի $\frac{2}{5}$ մասը նա անցնի ավտոբուսով, իսկ $\frac{3}{5}$ մասը՝ գնացքով, ապա ամբողջ ճանապարհի վրա կծախսի 4 ժ. 20 րոպե: Որքա՞ն ժամանակում նա ամբողջ ճանապարհը կանցնի գնացքով:

❖**110.** Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարի վրա, ապա քանորդում կստացվի 6, իսկ մնացորդում՝ 3: Իսկ եթե այդ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարից 2-ով մեծ թվի վրա, ապա և՛ քանորդում և՛ մնացորդում կստացվի 5: Գտեք այդ երկնիշ թիվը:

❖**111.** Ավազանը լցվում է երկու ծորակներից՝ տաք և սառը ջրով: Եթե ծորակները բացվեն միաժամանակ, ապա դատարկ ավազանը կլցվի 1ժ 20 րոպեում: Իսկ եթե առաջին խողովակը բացվի 10 րոպե, իսկ երկրորդը՝ 12 րոպե, ապա կլցվի ավազանի $\frac{2}{15}$ մասը: Որքա՞ն ժամանակում կլցվի ավազանը սառը ջրի ծորակով:

❖**113.** Կազմեք խնդիր, որը լուծվում է հետևյալ համակարգի.

ա) $\begin{cases} x + y = 13, \\ x - y = 3, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + 5y = 28, \\ 2x + 4y = 22: \end{cases}$

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐ

$$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} =$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C} \cdot \mathrm{A}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{B}}$$

2.1. Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հասկացությունը

Մենք արդեն գիտենք, որ ցանկացած a թվի n ($n > 1$) բնական ցուցիչով աստիճանը սահմանվում է այսպես՝

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ անգամ}} :$$

Եթե $n = 1$, ապա համարվում է, որ այդ հավասարության աջ մասը հավասար է a-ի՝

$$a^1 = a:$$

Նշվել է նաև, որ բնական ցուցիչով աստիճաններն օժտված են հետևյալ հատկություններով.

1.° Ցանկացած a և b թվերի և ցանկացած n բնական թվի համար՝

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n:$$

2.° Ցանկացած a թվի և ցանկացած m և n բնական թվերի համար՝

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}:$$

3.° Ցանկացած a իրական թվի և ցանկացած m և n բնական թվերի համար՝

$$(a^m)^n = a^{mn}:$$

Այժմ պարզենք, թե ինչպես պետք է բաժանել միևնույն a թվի բնական ցուցիչներով աստիճանները: Ընդ որում՝ պարտավոր ենք համարել, որ $a \neq 0$, քանի որ զրոյի վրա բաժանել չի կարելի:

Եվ այսպես, դիցուք՝ a-ն զրոյից տարբեր որևէ թիվ է, իսկ m-ը և n-ը՝ բնական թվեր: Դիտարկենք a^m-ի և a^n-ի քանորդը՝

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n}:$$

Այս կոտորակի համար կիրառենք կոտորակների հիմնական հատկությունը (համարիչը և հայտարարը կարելի է բազմապատկել զրոյից տարբեր միևնույն թվով, կամ բաժանել զրոյից տարբեր միևնույն թվի վրա):

Քննարկենք երեք դեպք:

1) Եթե $m > n$, ապա

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}: \qquad (1)$$

Մենք գալիս ենք այսպիսի եզրակացության. եթե $a \neq 0$, m և n-ը բնական թվեր են, ընդ որում $m > n$, ապա

$$a^m : a^n = a^{m-n}:$$

2) Դիցուք՝ $m < n$: Վերցնենք, օրինակ, $m = 3$, $n = 5$: Այդ դեպքում

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1 \cdot a^3}{a^2 \cdot a^3} = \frac{1}{a^2}$$

Մենք տեսնում ենք, որ $m < n$ դեպքում նախորդ կանոնը հնարավոր չէ կիրառել: Սակայն եթե պայմանավորվենք $\frac{1}{a^2}$ կոտորակը նշանակել a^{-2}-ով, այսինքն համարենք, որ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ապա կստանանք

$$a^3 : a^5 = a^{-2} = a^{3-5}$$

հավասարությունը, որը կարելի է համարել (1) հավասարության մասնավոր դեպք, առանց $m > n$ պայմանի:

Ընդհանուր դեպքում, եթե $m < n$ և $a \neq 0$, ապա

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}:$$

Այստեղ $\frac{1}{a^{n-m}}$ կոտորակը նշանակված է $a^{-(n-m)}$-ով:

3) Այժմ դիտարկենք $m = n$ դեպքը: Այդ դեպքում

$$a^m : a^n = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1:$$

Այս հավասարությունը ցույց է տալիս, որ նպատակահարմար է $a^0 (a \neq 0)$-ն համարել հավասար 1-ի, և այդ դեպքում կստացվի

$$a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m},$$

որը նույնպես կարելի է համարել (1) հավասարության մասնավոր դեպք, սակայն առանց $m > n$ սահմանափակման:

Վերը բերված դատողությունները ցույց են տալիս, որ նպատակահարմար է մտցնել հետևյալ երկու ***պայմանավորվածությունները.***

1. Զրոյից տարբեր ցանկացած a թվի և ցանկացած m բնական թվի համար $\frac{1}{a^m}$ թիվը նշանակել a^{-m}-ով և գրել՝

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ (a \neq 0) :$$

Այս հավասարությունը կարդում են այսպես. «a-ի $-m$ աստիճանը հավասար է մեկը բաժանած a-ի m աստիճանի»:

2. Ցանկացած զրոյից տարբեր a թվի համար a^0 արտահայտությունը համարել 1 թիվը և գրել՝

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0):$$

Այս հավասարությունը կարդում են այսպես. «a-ի զրո աստիճանը հավասար է 1-ի»:

Այսպիսով, սահմանվեց, թե ինչ է a^m-ը, որտեղ $a \neq 0$ և m-ը ցանկացած ***ամբողջ թիվ է***:

a^m թիվն անվանում են ***ամբողջ ցուցիչով աստիճան,*** a-ն՝ աստիճանի ***հիմք,*** m թիվը՝ ***աստիճանացույց:***

Դիտողություն: 0^0 արտահայտությունը համարվում է իմաստ չունեցող արտահայտություն: Եթե m-ը բնական թիվ է, ապա 0^{-m} արտահայտությունը նույնպես համարում են իմաստ չունեցող, սակայն $0^m = 0$:

Առաջադրանքներ

114. ա) Ի՞նչ է հասկացվում a^0 գրառմամբ, եթե $a \neq 0$:
բ) Ի՞նչ է հասկացվում a^{-m} գրառմամբ, եթե $a \neq 0$, և m-ը բնական թիվ է:
գ) Ի՞նչն են անվանում բնական ցուցիչով աստիճան:
դ) Իմաստ ունե՞ն արդյոք 0^5, 0^0, 0^{-5} արտահայտությունները:

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (115-116).

115. ա) 5^0; բ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; գ) $(-1,2)^0$; դ) $(-1)^0$:

116. ա) $\frac{2^4}{2^3}$; բ) $\frac{2^4}{2^4}$; գ) $\frac{2^4}{2^5}$; դ) $\frac{2^5}{2^7}$;
ե) $\frac{3^5}{3^4}$; զ) $\frac{3^{100}}{3^{100}}$; է) $\frac{(-0,3)^4}{(-0,3)^5}$; ը) $\frac{0,2^7}{0,2^5}$:

117. Պարզեք՝ իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը: Եթե այո, ապա հաշվեք նրա արժեքը:

ա) $\left(0,25 \cdot 79 - 3,21 \cdot 2\frac{1}{11}\right)^0$; բ) $(0,48 \cdot 5,2 - 4,8 \cdot 0,52)^0$:

118. Ներկայացրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով.

ա) $2 \cdot 2 \cdot 2$; բ) $2^3 \cdot 2^5$; գ) $\frac{1}{3^2}$; դ) 4;
ե) $\frac{1}{3}$; զ) $\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$; է) 5;
ը) $\frac{1}{16}$; թ) $\frac{1}{25}$; ժ) $2^3 : 2^3$;
ի) $\frac{9^7}{9^5}$; լ) $\frac{0,5^6}{0,5^7}$; խ) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 : \left(-\frac{1}{5}\right)^7$:

Գտեք արտահայտության արժեքը (119-121).

119. ա) $10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$;
բ) $2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$;
գ) $(-3)^3, (-3)^2, (-3)^1, (-3)^0, (-3)^{-1}, (-3)^{-2}, (-3)^{-3}$:

120. ա) $1^{-1}, -1^1, (-1)^1, (-1)^{-1}, -1^{-1}$;
բ) $1^{-2}, -1^2, (-1)^2, (-1)^{-2}, -1^{-2}$;
գ) $2^{-2}, -2^2, (-2)^2, (-2)^{-2}, -2^{-2}$:

121. ա) 4^{-2}; բ) 3^{-1}; գ) 3^{-4};
դ) $7,12^0$; ե) $5^{-1} + 4^{-1}$; զ) $(5 + 4)^{-1}$;
է) $4^{-1} - 5^{-1}$; ը) $(3^{-1} - 5^{-1})^{-2}$; թ) $2^{-3} + 4^{-2}$;
ժ) $3^{-2} - 9^{-1}$; ի) $4^2 \cdot 2^{-3}$; լ) $3^{-4} : 9^{-2}$:

122. Ստուգեք հավասարությունը.

ա) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$; բ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3}$; գ) $\left(\frac{12}{31}\right)^{-5} = \left(\frac{31}{12}\right)^{5}$:

123. Ապացուցեք, որ $a \neq 0$, $b \neq 0$ թվերի և k ամբողջ թվի համար ճիշտ է

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k}$$

հավասարությունը:

Համեմատեք թվերը (124, 125).

124. ա) 5^0 և $(-5)^0$; բ) 5^{-2} և 5^2; գ) $(-2)^3$ և $(-2)^0$;
դ) -3^2 և $(-3)^2$; ե) $(-2)^4$ և 2^{-4}; զ) -2^4 և 2^{-4}:

125. ա) 19^{-20} և $\left(\frac{1}{19}\right)^{20}$; բ) 1999^{2000} և $\left(\frac{1}{1999}\right)^{-2000}$:

126. Համեմատեք զրոյի հետ.
ա) 2^{-3}; բ) $(-2)^3$; գ) $(-2)^{-3}$; դ) -2^3;
ե) 2^{-4}; զ) $(-2)^4$; է) $(-2)^{-4}$; ը) -2^4:

Ներկայացրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով, եթե $a \neq 0$ (127, 128):

127. ա) $a^3 \cdot a^4$; բ) $a^4 \cdot a$; գ) $a^{13} : a^6$; դ) $a^{12} : a$;
ե) $(a^4)^6$; զ) $(a^2)^5$; է) $a^7 \cdot b^7$; ը) $a^4 \cdot b^4$:

128. ա) $a^5 : a^6$; բ) $a^7 : a^6$; գ) $a^4 : a$; դ) $a^{12} : a^{12}$;
ե) $a^{-4} : a^6$; զ) $a^4 : a^{-5}$; է) $a^{-11} : a^{-8}$; ը) $a^{-4} : a$;
թ) $a^6 : a^5$; ժ) $a^9 : a^0$; ի) $a^{-3} : a^0$; լ) $a^0 : a^{-8}$:

2.2. Ամբողջ ցուցիչով աստիճանի հատկությունները

Դիցուք՝ a-ն և b-ն զրոյից տարբեր ցանկացած իրական թվեր են, իսկ m-ը և n-ը՝ ցանկացած ամբողջ թվեր: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad (3)$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}: \qquad (5)$$

(1) հավասարությունը նշանակում է, որ ***միևնույն թվի աստիճանները բազմապատկելիս ցուցիչները գումարվում են:***

(2) հավասարությունը նշանակում է, որ ***միևնույն թվի աստիճանները բաժանելիս ցուցիչները հանվում են,*** ավելի ստույգ՝ համարիչի ցուցիչից հանում են հայտարարի ցուցիչը:

Այս պնդումների ճշմարիտ լինելը կարելի է ստուգել օրինակներով ⌈(իհարկե, դա խիստ ապացուցում չի կարելի համարել. ճշգրիտ ապացուցումները կբերվեն հետագայում):⌋[(1)]

Այդպիսի օրինակ, երբ $m = 3$, $n = 5$ դիտարկվեց նախորդ կետում:

Դիտարկենք ևս մի քանի օրինակ ($a \neq 0$).

$$1)\ a^{-3} \cdot a^2 = \frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3+2};$$

$$2)\ a^{-6} \cdot a^{-7} = \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^{13}} = a^{-13} = a^{-6+(-7)};$$

$$3)\ \frac{a^{-3}}{a^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} = a^{-1} = a^{-3-(-2)};$$

$$4)\ \frac{a^5}{a^{-2}} = \frac{a^5}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a^5 \cdot a^2}{1} = a^7 = a^{5-(-2)};$$

---

(1) Խմբագրի կողմից ավելացված տեքստային հատվածները և խնդիրները սկսվում են ⌈ և ավարտվում ⌋ նշաններով:

5) $\frac{a^0}{a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0-5}$:

(3) հավասարությունը նշանակում է, որ ***աստիճանը աստիճան բարձրացնելիս ցուցիչները բազմապատկվում են:***

Դրանում համոզվենք հետևյալ օրինակներով ($a \neq 0$).

6) $(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3 \cdot a^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{-3 \cdot 2}$;

7) $(a^{-4})^0 = 1 = a^0 = a^{-4 \cdot 0}$;

8) $(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6 = a^{-2 \cdot (-3)}$:

(4) հավասարությունը նշանակում է, որ ***երկու թվերի արտադրյալի աստիճանը հավասար է այդ թվերի նույն աստիճանների արտադրյալին:***

(5) հավասարությունը նշանակում է, որ ***երկու թվերի քանորդի աստիճանը հավասար է այդ թվերի նույն աստիճանների քանորդին:***

Այս պնդումների հավաստիությանը համոզվենք հետևյալ օրինակներով ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

9) $(a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{(a \cdot b)^3} = \frac{1}{a^3 \cdot b^3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$;

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$:

1-11 օրինակներում մանրամասնորեն կատարվեցին բոլոր քայլերը:

Եթե (1)-(5) կանոններն արդեն յուրացվել են, միջանկյալ հաշվարկները կարելի է բաց թողնել և միանգամից կիրառել այդ կանոնները:

Օրինակ՝ եթե $a \neq 0$ և $b \neq 0$, ապա՝

1) $a^{-3} \cdot a^2 = a^{-3+2} = a^{-1}$;

2) $a^{-6} \cdot a^{-7} = a^{-6+(-7)} = a^{-13}$;

3) $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3-(-2)} = a^{-1}$;

4) $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^{5-(-2)} = a^7$;

5) $\frac{a^0}{a^5} = a^{0-5} = a^{-5}$;

6) $(a^{-3})^2 = a^{-3 \cdot 2} = a^{-6}$;

7) $(a^{-4})^0 = a^{-4 \cdot 0} = a^0 = 1$;

8) $(a^{-2})^{-3} = a^{-2 \cdot (-3)} = a^6$;

9) $(a \cdot b)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$;

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$;

11) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$:

Առաջադրանքներ

129. ա) Ի՞նչ կանոնով են բազմապատկում միևնույն թվի ամբողջ ցուցիչներով աստիճանները:
բ) Ի՞նչ կանոնով են բաժանում միևնույն թվի ամբողջ աստիճանները:
գ) Ի՞նչ կանոնով են թվի ամբողջ աստիճանը ամբողջ աստիճան բարձրացնում:
դ) Ի՞նչ կանոնով են գտնում երկու թվերի արտադրյալի ամբողջ աստիճանը:
ե) Ի՞նչ կանոնով են գտնում երկու թվերի քանորդի ամբողջ աստիճանը:

130. Ներկայացրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով.

ա) $a^{-3} \cdot b^{-3}$; բ) $7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 7$:

131. Արտահայտությունը ներկայացրեք աստիճանների արտադրյալի տեսքով՝

ա) $(a^2b^{-5})^3$; բ) $(a^{-7}b^2)^{-2}$; գ) $(a^{-3}b^{-5})^{-4}$:

132. Ապացուցեք, որ եթե $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, իսկ m, n, k-ն ամբողջ թվեր են, ապա

ա) $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$;
բ) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$;
գ) $((a^m)^n)^k = a^{m \cdot n \cdot k}$:

Ներկայացրեք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի տեսքով, եթե $a \neq 0$ (133-137).

133. ա) $2^3 \cdot 2^4$; բ) $5 \cdot 5^6$; գ) $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4$;
դ) $7^2 \cdot 7 \cdot 7^5$; ե) $3^6 \cdot 3^7 \cdot 3 \cdot 3$; զ) $6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^3 \cdot 6^2$;
է) $11^2 \cdot 11^2 \cdot 11^2$; ը) $9^3 \cdot 9^6 \cdot 9^2 \cdot 9^4 \cdot 9$:

134. ա) $a^5 \cdot a^4$; բ) $a^3 \cdot a^8$; գ) $a^{10} \cdot a$;
դ) $a \cdot a^7$; ե) $a \cdot a$; զ) $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$:

135. ա) $2^5 : 2^4$; բ) $3^7 : 3^8$; գ) $5^9 : 5$;
դ) $\frac{10^3}{10}$; ե) $\frac{5^7}{5^{13}}$; զ) $\frac{8^{12}}{8^{10}}$:

136. ա) $a^7 : a^3$; բ) $a^8 : a^{12}$; գ) $a^6 : a$;
դ) $\frac{a^{12}}{a^4}$; ե) $\frac{a^{20}}{a^{22}}$; զ) $\frac{a^{20}}{a}$:

137. ա) $\frac{10^2}{12^2}$; բ) $\frac{4^3}{5^6}$; գ) $\frac{25^4}{7^8}$;
դ) $\frac{(m^3)^4}{(a^4)^3}$; ե) $\frac{m^3m^5}{a^8}$; զ) $\frac{(n^6)^2}{a^{12}}$:

138. Համեմատեք թվերը.

ա) 3^4 և 4^3; բ) 2^4 և 4^2; գ) 10^{20} և 20^{10};
դ) 100^{200} և 200^{100}; ե) 1999^{2000} և 1998^{1999}:

139. Ներկայացրեք a^2 հիմքով աստիճանի տեսքով.

ա) $(a^5)^2$; բ) $(a^3)^4$; գ) $(a^6)^7$:

140. a^{50}-ը ներկայացրեք տվյալ հիմքով աստիճանի տեսքով.
ա) a^5; բ) a^2; գ) a^{10}:

141. Ներկայացրեք քառակուսու տեսքով.
ա) a^4; բ) a^{20}; գ) a^{50}:

142. Գոնե մի եղանակով ներկայացրեք երկու արտադրիչների արտադրյալի տեսքով.
ա) 7^{10}; բ) a^6; գ) $(cd)^7$:

143. Գոնե մի եղանակով ներկայացրեք երեք արտադրիչների տեսքով՝
ա) 5^6; բ) b^5; գ) $(ab)^4$:

144. a^{50}-ը ($a \neq 0$) ներկայացրեք նշված հիմքով աստիճանի տեսքով.
ա) a^{-2}; բ) a^{-5}; գ) a^{10}; դ) a^{-10}; ե) a^{-25}:

145. Աստղանիշի փոխարեն գրեք այնպիսի թիվ, որ հավասարությունը ճիշտ լինի.
ա) $3^5 \cdot * = 3^8$; բ) $4^3 \cdot * = 4^6$; գ) $2^4 \cdot * = 2^2$;
դ) $(5^3)^* = 5^6$; ե) $(4^3)^* = 4^{15}$; զ) $2^* \cdot 3^* = 6^3$;
է) $4^5 : * = 4^2$; ը) $3^5 : * = 3^7$; թ) $(2 \cdot 3)^* = 6^5$:

2.3. Հանրահաշվական կոտորակներ և նրանց հատկությունները

Մենք արդեն նշել ենք, որ երկու բազմանդամների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը բազմանդամ է: Այժմ քննարկենք երկու բազմանդամների քանորդը: Բազմանդամները կնշանակենք լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ A, B, C, D, ...:

Հանրահաշվական կոտորակ է կոչվում $\frac{A}{B}$ արտահայտությունը՝ A բազմանդամի և ոչ զրոյական B բազմանդամի քանորդը:

A բազմանդամը կոչվում է $\frac{A}{B}$ հանրահաշվական կոտորակի ***համարիչ***, իսկ B բազմանդամը՝ ***հայտարար:***

$$\frac{a}{a+1} \quad \text{և} \quad \frac{a^2-b^2}{3}$$

արտահայտությունները կարող են ծառայել որպես հանրահաշվական կոտորակների օրինակներ: Նկատենք, որ երկրորդ կոտորակի համարիչը $a^2 - b^2$ բազմանդամն է, իսկ հայտարարը՝ 3 թիվը, որը, ինչպես գիտենք, կարելի է դիտարկել որպես բազմանդամ:

Եթե, մասնավորապես, A բազմանդամը a թիվն , իսկ ոչ զրոյական B բազմանդամը՝ b թիվը

($b \neq 0$), ապա $\frac{A}{B}$ քանորդը $\frac{a}{b}$ թիվն է:

Օրինակ, եթե A = –5, իսկ B = 3, ապա $\frac{A}{B}$ հանրահաշվական կոտորակը $\frac{-5}{3}$ թիվն է:

Հանրահաշվական կոտորակներն օժտված են հետևյալ հավասարություններով արտահայտված հատկություններով՝

$$\frac{A}{1} = A: \qquad (1)$$

Ցանկացած ոչ զրոյական C բազմանդամի համար՝

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \qquad (2)$$

$$-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}: \qquad (3)$$

(1) հավասարությունը նշանակում է, որ A և 1 բազմանդամների քանորդը նույն A բազմանդամն է, այսինքն՝ ցանկացած A բազմանդամ կարելի է

դիտարկել որպես $\frac{A}{1}$ հանրահաշվական կոտորակ: Օրինակ՝

$$x - 2y = \frac{x - 2y}{1}:$$

Դիտողություն 1: Իրականում (2) հավասարության աջ մասի համարիչում և հայտարարում ոչ թե բազմանդամներ են, այլ բազմանդամների արտադրյալներ: Սակայն քանի որ բազմանդամների արտադրյալը կարելի է ձևափոխել բազմանդամի, ապա այնպիսի արտահայտություններ, ինչպիսին է $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$-ն, որտեղ A, B և C-ն բազմանդամներ են, նույնպես անվանում են հանրահաշվական կոտորակներ: (2) հավասարությունը նշանակում է, որ եթե հանրահաշվական կոտորակի համարիչը և հայտարարը բազմապատկենք միևնույն ոչ զրոյական բազմանդամով, ապա կստացվի նրան հավասար հանրահաշվական կոտորակ:

Դիտողություն 2. Այսուհետ «հանրահաշվական կոտորակ» արտահայտության մեջ «հանրահաշվական» ածականը երբեմն բաց է թողնվում, սակայն ենթադրվում է այդպես:

(2) հավասարությամբ արտահայտվող հատկությունը անվանում են ***հանրահաշվական կոտորակի հիմնական հատկություն:***

(2) հավասարությունը կարելի է ներկայացնել և հակառակ կարգով (աջից ձախ)՝

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B}:$$

Այս հավասարությունը նշանակում է, որ հանրահաշվական կոտորակը կարելի է կրճատել ոչ զրոյական բազմանդամով: Օրինակ՝

$$\frac{2x + x^2}{3x - x^2} = \frac{x(2 + x)}{x(3 - x)} = \frac{2 + x}{3 - x},$$

$$\frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}:$$

(3) հավասարությունը նշանակում է, որ եթե $\frac{A}{B}$-ն հանրահաշվական կոտորակ է, ապա $\left(-\frac{A}{B}\right)$ արտահայտությունը նույնպես հանրահաշվական կոտորակ է և հավասար է (–A) և B կամ A և (–B) բազմանդամների քանորդին: Օրինակ՝

$$-\frac{a - b}{c - a} = \frac{-(a - b)}{c - a} = \frac{-a + b}{c - a} \quad \text{կամ} \quad -\frac{a - b}{c - a} = \frac{a - b}{-(c - a)} = \frac{a - b}{-c + a}:$$

Առաջադրանքներ

146. Ի՞նչն են անվանում հանրահաշվական կոտորակ, հանրահաշվական կոտորակի համարիչ և հայտարար: Բերեք օրինակներ:

147. Տրված արտահայտությունը հանրահաշվական կոտորա՞կ է.

ա) $7a$; բ) $x+y$; գ) $\dfrac{x-2ab}{x^2+y^2}$; դ) $\dfrac{x}{3a}-7xy$:

148. Նշեք հանրահաշվական կոտորակի երեք օրինակ՝ օգտագործելով տրված արտահայտությունները.

ա) xy, $(a-b)$, $3mn^2$; բ) m^2-n^2, $-ab$, $4(x^2-y^2)$:

149. Կիրառելով հանրահաշվական կոտորակների հատկությունները՝ տրված հանրահաշվական կոտորակը ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով.

ա) $\dfrac{x-1}{1}$; բ) $\dfrac{3x+y}{1}$; գ) $\dfrac{x^2+3xy-y^2}{1}$;

դ) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{1}$; ե) $\dfrac{(x-y)6x}{3x}$; զ) $\dfrac{15(x+y)}{5}$;

է) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$; ը) $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y}$:

150. Կոտորակը ձևափոխեք այնպես, որ նրա առջև դրված նշանը փոխվի հակադիրով.

ա) $\dfrac{1-a}{a}$; բ) $-\dfrac{x}{x-3}$; գ) $\dfrac{x-y}{x+y}$; դ) $-\dfrac{a^2+1}{a-2}$;

ե) $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$; զ) $-\dfrac{1}{2x+3y}$; է) $\dfrac{-a-b}{x+y}$; ը) $-\dfrac{-x-y}{-a-b}$:

151 ա) Կոտորակները ներկայացրեք $36x^2$ հայտարարով կոտորակի տեսքով.

$$\frac{5}{36},\quad \frac{2}{x^2},\quad \frac{11}{3x},\quad \frac{7}{9x^2},\quad \frac{1}{4x}$$

բ) Կոտորակները ներկայացրեք $20x^2y$ հայտարարով կոտորակի տեսքով.

$$\frac{1}{20y},\quad \frac{5}{x^2},\quad \frac{7}{20},\quad \frac{11}{2x},\quad \frac{3}{5xy}:$$

152. A միանդամը կամ բազմանդամն ընտրեք այնպես, որ ստացվի ճիշտ հավասարություն.

ա) $\frac{4a}{6a^3} = \frac{2}{A}$; բ) $\frac{12x^2y}{48xy} = \frac{x}{A}$;

գ) $\frac{3a^2(x+y)}{12ab(x+y)} = \frac{A}{4b}$; դ) $\frac{7mn(x-y)^2}{14(x-y)^3} = \frac{mn}{A}$:

Կրճատեք կոտորակը (153-160).

153. ա) $\frac{4}{8}$; բ) $\frac{8}{12}$; գ) $\frac{45}{210}$; դ) $\frac{256}{924}$;

ե) $\frac{2a}{6}$; զ) $\frac{14a}{21ab}$; է) $\frac{x^5}{x^7}$; ը) $\frac{8m^3n}{12m^2}$;

թ) $\frac{24a^5b^6c}{36a^7b^4c}$; ժ) $\frac{48x^3y^4z^3}{56xy^5z^4}$:

154. ա) $\frac{2(x+y)}{4ax}$; բ) $\frac{a+b}{a+b}$; գ) $\frac{2(x-1)}{5(x-1)}$;

դ) $\frac{3a(a-b)^2}{6a(a-b)^2}$; ե) $\frac{4x(x-y)^3}{16x^2y(x-y)}$; զ) $\frac{25m^2n(a-b)}{35mn^2(a-b)^2}$;

է) $\frac{2p(p-q)(p^2+q^2)}{4q(p-q)(p^2+q^2)}$; ը) $\frac{8a(a+b)^2(a-b)}{18a(a-b)(a+b)}$:

155. ա) $\frac{x-y}{y-x}$; բ) $\frac{2(a-b)}{3(b-a)}$;

գ) $\frac{4mn(m-n)}{2m(n-m)}$; դ) $\frac{6a^2b^3(a-3)}{14ab^3(a-3)}$:

156. ա) $\frac{2x+2y}{4}$; բ) $\frac{3a+3b}{6a}$; գ) $\frac{4m-4n}{8mn}$;

դ) $\frac{12ab}{6a-6b}$; ե) $\frac{2a-2b}{4a+4b}$; զ) $\frac{6x+6y}{3x-3y}$:

157. ա) $\frac{ax-bx}{cx+dx}$; բ) $\frac{ac+bc}{mc+nc}$; գ) $\frac{x^2}{x^2+xy}$;

դ) $\dfrac{ab}{a-ab}$; ե) $\dfrac{m^2n}{m^2n-mn^2}$; զ) $\dfrac{ax-bx}{xy+x^2}$;

է) $\dfrac{p^2-p}{ap-bp}$; ը) $\dfrac{x^2-xy}{2xy+2x^2}$:

158. ա) $\dfrac{3xy}{3x^2a-3x}$; բ) $\dfrac{4m^2n}{6mn^2-8m^2n}$; գ) $\dfrac{3a^2+4ab}{9a^2b+12ab^2}$;

դ) $\dfrac{4xy-x^2}{4x^2y-x^3y}$; ե) $\dfrac{2mn-6m^2}{12m^2n-4mn^2}$; զ) $\dfrac{16p^3q^3-24p^2q^4}{12p^2q^3-8p^7q^2}$:

159. ա) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$; բ) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$; գ) $\dfrac{m^2-n^2}{2m+2n}$; դ) $\dfrac{xm+xn}{m^2-n^2}$;

ե) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; զ) $\dfrac{a^2-b^2}{b^2+2ab+a^2}$; է) $\dfrac{n^2-m^2}{(n-m)^2}$; ը) $\dfrac{p-p^2}{p^2-1}$;

թ) $\dfrac{x+x^2}{x^3-x}$; ժ) $\dfrac{a^3-2a^2}{4-a^2}$:

160. ա) $\dfrac{3m-3n}{m^3-n^3}$; բ) $\dfrac{1-a^3}{1+a+a^2}$; գ) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; դ) $\dfrac{2p^2-2p+2}{p^3+1}$;

ե) $\dfrac{a^2-4a+4}{a^2-4}$; զ) $\dfrac{3x^2+6xy+3y^2}{12y^2-12x^2}$; է) $\dfrac{m^2-n^2}{n^3-m^3}$; ը) $\dfrac{2p^3-2q^3}{4q^2-4p^2}$;

թ) $\dfrac{6a^2-6b^2}{3a^3+3b^3}$; ժ) $\dfrac{(x^3-y^3)(x+y)}{x^2-y^2}$:

161. Կազմեք կոտորակ, որը կրճատվի.

ա) 2-ով, բ) $3ab$-ով, գ) $a+5$-ով,
դ) $-7m$-ով, ե) $a(x-2y)$-ով, զ) p^2-q^2-ով:

2.4. Հանրահաշվական կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելը

Օգտվելով կոտորակի հիմնական հատկությունից՝ ցանկացած երկու՝ $\dfrac{A}{B}$ և $\dfrac{C}{D}$՝ կոտորակներ կարելի է բերել ընդհանուր հայտարարի: Ընդ որում՝ որպես ընդհանուր հայտարար միշտ կարելի է վերցնել տրված կոտորակների հայտարարների արտադրյալը՝

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D},\qquad \frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}:$$

Օրինակ 1.

$\dfrac{1}{x-1}$ և $\dfrac{1}{x+1}$ կոտորակների համար կարելի է ընտրել $(x-1)(x+1)=x^2-1$ ընդհանուր հայտարարը, ուստի՝

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x^2-1}:$$

Սակայն հնարավոր է, որ B և D բազմանդամներն ունենան R ընդհանուր արտադրիչ, այսինքն $B=B_1\cdot R$, $D=D_1\cdot R$, որտեղ B_1-ը և D_1-ը բազմանդամներ են: Այդ դեպքում որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել $B_1\cdot D_1\cdot R$ արտադրյալը, որը պարունակում է ավելի քիչ արտադրիչներ, քան $B\cdot D=B_1\cdot R\cdot D_1\cdot R$ արտադրյալը՝

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{B_1\cdot R}=\frac{A\cdot D_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}\quad \text{և}\quad \frac{C}{D}=\frac{C}{D_1\cdot R}=\frac{C\cdot B_1}{B_1\cdot D_1\cdot R}:$$

Օրինակ 2.

$\dfrac{1}{x^2-1}$ և $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ կոտորակների համար որպես ընդհանուր հայտարար կարելի է վերցնել նրանց հայտարարների արտադրյալը՝ $(x^2-1)\cdot(x-1)^2$-ն: Սակայն, եթե տված կոտորակների հայտարարները վերածենք արտադրիչների, ապա կպարզվի, որ նրանք ունեն $x-1$ ընդհանուր արտադրիչը՝

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$(x-1)^2=(x-1)(x-1):$$

Այժմ պարզ է, որ տված կոտորակների ընդհանուր հայտարար հարմար է վերցնել
$$(x-1)(x+1)(x-1)=(x-1)^2(x+1)$$
արտադրյալը: Այդ դեպքում՝

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)};$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)}:$$

Հետևաբար, կոտորակներն ընդհանուր հայտարարի բերելիս օգտակար է նրանց հայտարարները վերածել արտադրիչների:

Երբեմն երկու կոտորակները ընդհանուր հայտարարի բերելիս, բավական է այդ կոտորակներից մեկի հայտարարի նշանը փոխել՝ միաժամանակ փոխելով նաև համարիչի կամ կոտորակի նշանը:

Օրինակ 3.

$\frac{3}{x-1}$ և $\frac{x}{1-x}$ կոտորակներն ընդհանուր հայտարարի բերելու համար փոխենք երկրորդ կոտորակի համարիչի և հայտարարի նշանները՝
$$\frac{x}{1-x}=\frac{-x}{x-1}:$$

Առաջադրանքներ

162. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ցանկացած երկու հանրահաշվական կոտորակներ կարելի է բերել ընդհանուր հայտարարի, որը հավասար է նրանց հայտարարների արտադրյալին:

Կոտորակները բերեք ընդհանուր հայտարարի (163-168).

163. ա) $\frac{2}{3}$ և $\frac{4}{5}$; բ) $\frac{3}{4}$ և $\frac{6}{7}$; գ) $\frac{8}{9}$ և $\frac{5}{-9}$;

դ) $\frac{4}{5}$ և $\frac{3}{-7}$; ե) $\frac{2}{3}$ և $\frac{5}{6}$; զ) $\frac{13}{14}$ և $\frac{6}{7}$;

է) $\frac{7}{9}$ և $\frac{5}{-3}$; ը) $\frac{1}{5}$ և $\frac{3}{-10}$; թ) $\frac{3}{10}$ և $\frac{4}{15}$;

ժ) $\frac{5}{12}$ և $\frac{1}{16}$; ի) $\frac{8}{14}$ և $\frac{5}{-21}$; լ) $\frac{7}{24}$ և $\frac{1}{-18}$:

164. ա) $\frac{x}{2}$ և $\frac{1}{3}$; բ) $\frac{x}{5}$ և $\frac{-3}{7}$; գ) $\frac{2x}{5}$ և $\frac{5}{-6}$;

դ) $\frac{2}{3}$ և $\frac{7x}{-4}$; ե) $\frac{5}{3x}$ և $\frac{7}{6}$; զ) $\frac{11}{2x}$ և $\frac{3}{7}$;

է) $\frac{4}{x}$ և $\frac{3}{-x}$; ը) $\frac{1}{5x}$ և $\frac{13}{-10x}$; թ) $\frac{3}{x}$ և $\frac{x}{3}$:

165. ա) $\frac{x}{x-2}$ և $\frac{1}{2-x}$; բ) $\frac{x}{5+x}$ և $\frac{3}{x+5}$;

գ) $\frac{4x}{x-1}$ և $\frac{2-7x}{1-x}$; դ) $\frac{2x}{3x+6}$ և $\frac{5}{x+2}$;

ե) $\frac{15}{2x-8}$ և $\frac{7}{x-4}$; զ) $\frac{3-x}{5-x}$ և $\frac{5}{2x-10}$:

166. ա) $\frac{x}{3x-x^2}$ և $\frac{4}{3-x}$; բ) $\frac{1}{2+x}$ և $\frac{x-1}{x^2-4}$;

գ) $\frac{3}{4+6x}$ և $\frac{5x}{9x+6}$; դ) $\frac{5x}{3-x}$ և $\frac{2}{x^2-9}$:

167. ա) $\frac{x}{4x+x^2}$ և $\frac{4}{3x+12}$; բ) $\frac{13x}{25-x^2}$ և $\frac{x-1}{10+2x}$;

գ) $\frac{x-3}{4-x^2}$ և $\frac{5x}{x^2-4}$; դ) $\frac{2}{(x-3)^2}$ և $\frac{1+x}{x^2-9}$:

168. ա) $\frac{3x}{x^2+4x+4}$ և $\frac{x-4}{5x+10}$; բ) $\frac{1+x}{x^2+2x+4}$ և $\frac{x-1}{x^3-8}$;

գ) $\frac{x}{9-3x-x^2}$ և $\frac{5}{x^3-27}$; դ) $\frac{12}{(x-3)^2}$ և $\frac{2+x}{(3-x)^2}$:

2.5. Թվաբանական գործողություններ հանրահաշվական կոտորակների հետ

Միևնույն հայտարարով $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{B}$ հանրահաշվական կոտորակները գումարում և հանում են հետևյալ կանոններով՝

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}, \qquad (1)$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}: \qquad (2)$$

Իսկ եթե $\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ կոտորակներն ունեն տարբեր հայտարարներ, ապա նախ դրանք բերում են ընդհանուր հայտարարի, այնուհետև գումարում կամ հանում (1) և (2) կանոններով: Որպես ընդհանուր հայտարար միշտ կարելի է վերցնել B · D-ն և այդ դեպքում գումարումն ու հանումը կատարում են

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}, \qquad (1')$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D-C\cdot D}{B\cdot D} \qquad (2')$$

կանոններով:

$\frac{A}{B}$ և $\frac{C}{D}$ կոտորակների բազմապատկումն ու բաժանումը կատարում են

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}, \qquad (3)$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C} \qquad (4)$$

կանոններով: Ընդ որում՝ բաժանման դեպքում ենթադրվում է, որ C-ն ոչ զրոյական բազմանդամ է (ինչպես որ B-ն ու D-ն):

Օրինակներ.

1) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x-1}=\frac{1+x}{x-1}$;

2) $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1$;

$$3)\ \frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+4}{x^2-4};$$

$$4)\ \frac{x}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{x(x+3)-3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+9}{x^2-9};$$

$$5)\ \frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2}{x^3-y^3}-\frac{x^2-xy}{x^3-y^3}=\frac{x^2-(x^2-xy)}{x^3-y^3}=\frac{xy}{x^3-y^3};$$

$$6)\ \frac{a-4}{a+3}\cdot\frac{a+3}{a}=\frac{(a-4)(a+3)}{(a+3)a}=\frac{a-4}{a};$$

$$7)\ \frac{a-5}{a+7}:\frac{a-5}{8}=\frac{(a-5)\cdot 8}{(a+7)(a-5)}=\frac{8}{a+7}:$$

3) և 4) օրինակներում կոտորակների հայտարարները տարբեր են և չունեն ընդհանուր արտադրիչներ: Որպես այդ կոտորակների ընդհանուր հայտարար վերցված է նրանց հայտարարների արտադրյալը: 5-րդ օրինակում որպես ընդհանուր հայտարար վերցված է x^3-y^3 բազմանդամը, քանի որ

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2):$$

Ապացուցենք հատկություններ, որոնք բխում են հանրահաշվական կոտորակների հետ գործողությունների կատարման կանոններից:

1. Եթե B-ն ոչ զրոյական բազմանդամ է, ապա

$$\frac{0}{\mathrm{B}}=0:$$

Իրոք, համարիչում 0-ն կարելի է փոխարինել $0\cdot\mathrm{B}$-ով, իսկ հայտարարում B-ն՝ $1\cdot\mathrm{B}$-ով: Այնուհետև օգտվելով հանրահաշվական կոտորակների հիմնական հատկությունից, ստացված կոտորակը կարելի է կրճատել ոչ զրոյական B բազմանդամով: Արդյունքում կստանանք 0 թիվը (զրոյական բազմանդամը).

$$\frac{0}{\mathrm{B}}=\frac{0\cdot\mathrm{B}}{1\cdot\mathrm{B}}=\frac{0}{1}=0$$

2. $\dfrac{1}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}=\dfrac{1}{\mathrm{A}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{B}}:$

Իրոք, $\dfrac{1}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}=\dfrac{1\cdot 1}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}=\dfrac{1}{\mathrm{A}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{B}}:$

3. $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{A}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{B}}:$

Իրոք, $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot 1}{1\cdot B}=\frac{A}{1}\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}$:

Մասնավորապես, եթե B-ն թիվ է, օրինակ 7-է, ապա

$$\frac{A}{7}=\frac{1}{7}\cdot A:$$

Հետևաբար $\frac{A}{7}$ հանրահաշվական կոտորակը կարելի է դիտարկել որպես $\frac{1}{7}\cdot A$ բազմանդամ: Իհարկե, այս օրինակում 7 թիվը կարելի է փոխարինել զրոյից տարբեր ցանկացած թվով:

4. $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)$:

Իրոք, $\frac{A}{B}+\left(-\frac{C}{D}\right)=\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}=\frac{A\cdot D+B\cdot(-C)}{B\cdot D}=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}=\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$:

5. $\frac{A}{B}-\frac{A}{B}=0$:

Իրոք, $\frac{A}{B}-\frac{A}{B}=\frac{A-A}{B}=\frac{0}{B}=0$:

Առաջադրանքներ

169. Ի՞նչ կանոններով են գումարում, հանում, բազմապատկում և բաժանում հանրահաշվական կոտորակները:

170. Ապացուցեք հավասարությունը.

ա) $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\frac{C}{-D}$; բ) $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A}{B}-\frac{C}{-D}$:

Կատարեք գործողությունները (171-175).

171. ա) $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$; բ) $\frac{a}{7}-\frac{b}{7}$; գ) $\frac{2x}{5}-\frac{3y}{5}$; դ) $\frac{5m}{4}+\frac{3n}{4}$:

172. ա) $\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}$; բ) $\frac{2a}{3}-\frac{1-a}{3}$; գ) $\frac{a+b}{5}+\frac{a}{5}$; դ) $\frac{y}{7}-\frac{x-y}{7}$:

173. ա) $\frac{1}{a}+\frac{2}{a}$; բ) $\frac{a}{x}+\frac{3}{x}$;

գ) $\frac{a}{b}-\frac{2a}{b}$; դ) $\frac{x+1}{x}-\frac{x+3}{x}$:

174. ա) $\frac{3}{a+b}+\frac{5}{a+b}$; բ) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$; գ) $\frac{a+3}{a+b}-\frac{a-3}{a+b}$;

դ) $\frac{m+1}{m+n}-\frac{3-m}{m+n}$; ե) $\frac{2x-4}{x-3}-\frac{3x+5}{x-3}$; զ) $\frac{7p-1}{p+1}-\frac{7-p}{p+1}$:

175. ա) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x}{1-x}$; բ) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{y-x}$; գ) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{b-a}$;

դ) $\frac{4m-1}{n-m}-\frac{m-4}{m-n}$; ե) $\frac{2p+q}{p-2q}-\frac{p+3q}{2q-p}$; զ) $\frac{8a+b}{1-a}-\frac{2a-3b}{a-1}$:

176. A միանդամն ընտրեք այնպես, որ հավասարությունը ճիշտ լինի.

ա) $\frac{2}{3}=\frac{A}{3}$; բ) $\frac{7}{10}=\frac{28}{A}$; գ) $\frac{3}{8}=-\frac{A}{32}$:

դ) $-\frac{1}{5}=\frac{15}{A}$; ե) $\frac{5}{a}=\frac{A}{ab}$; զ) $\frac{6x}{y}=\frac{A}{6xy^2}$:

177. Արտահայտությունը ներկայացրեք կոտորակի տեսքով՝

ա) $a+\frac{a}{2}$; բ) $x-\frac{x}{3}$; գ) $\frac{x}{7}-2x$;

դ) $2+\frac{a}{3}$; ե) $1+\frac{1}{a}$; զ) $\frac{1}{b}-a$:

Ձևափոխեք հանրահաշվական կոտորակի (178-193).

178. ա) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$; բ) $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$; գ) $\frac{4m}{3}-\frac{2n}{5}$; դ) $\frac{a^2}{4}+\frac{2a}{3}$;

179. ա) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; բ) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}$; գ) $\frac{5a}{7}-\frac{b}{x}$; դ) $\frac{1}{2a}-\frac{1}{3}$;

180. ա) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$; բ) $\frac{2a}{a-2b}+\frac{3a}{a+b}$;

գ) $\dfrac{3x}{x-y}-\dfrac{2x}{2x-y}$; դ) $\dfrac{4p}{q-2p}-\dfrac{2p}{2p+q}$:

181. ա) $\dfrac{m^2}{3}-\dfrac{2m}{2}$; բ) $\dfrac{a-1}{10}+\dfrac{a}{15}$;

գ) $\dfrac{2x+3}{6}+\dfrac{x-1}{8}$; դ) $\dfrac{a-3}{10}-\dfrac{2-a}{15}$:

182. ա) $\dfrac{2}{p}+\dfrac{3}{pq}$; բ) $\dfrac{a}{xy}-\dfrac{b}{x}$;

գ) $\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{mn}$; դ) $\dfrac{a}{3b^2}+\dfrac{8}{2ab}$:

183. ա) $\dfrac{m}{ab}+\dfrac{m}{ac}$; բ) $\dfrac{2a}{mn}-\dfrac{5a}{mb}$;

գ) $\dfrac{2a-3b}{m}+\dfrac{4a-5b^2}{mb}$; դ) $\dfrac{x-y}{xy}-\dfrac{x-z}{xz}$:

184. ա) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}$; բ) $\dfrac{7}{m^4}-\dfrac{3a}{m^2}$;

գ) $\dfrac{1}{a^5b^3}+\dfrac{1}{ab^7}$; դ) $\dfrac{3a}{x^7y^5z}-\dfrac{3b}{xy^4z^5}$;

185. ա) $\dfrac{2x}{ax+bx}+\dfrac{3y}{ay+by}$; բ) $\dfrac{y}{ax-bx}-\dfrac{x}{ay-by}$;

գ) $\dfrac{1}{2x^2y-xy}+\dfrac{2}{y-2xy}$; դ) $\dfrac{3}{3m^2n-6mn^2}-\dfrac{2}{4mn-2m^2}$;

186. ա) $\dfrac{5}{m+n}-\dfrac{4n}{m^2-n^2}$ բ) $\dfrac{x}{4-9x^2}+\dfrac{1}{3x+2}$;

գ) $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b}{a^3-b^3}$; դ) $\dfrac{m^2+n^2}{m^3+n^3}-\dfrac{1}{2(m+n)}$;

ե) $\dfrac{x^2-2xy}{(x-2y)^3}+\dfrac{1}{2y-x}$; զ) $\dfrac{2(p+q)}{p^3-q^3}+\dfrac{3}{q^2-p^2}$:

187. ա) $1-\dfrac{x-y}{x+y}$; բ) $\dfrac{(a+b)^2}{b}-2a$;

գ) $a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$; դ) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+a-b$:

188. ա) $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}$ բ) $\dfrac{x}{y}:\dfrac{a}{b}$; գ) $\dfrac{4a}{7b}\cdot\dfrac{21}{a}$;

դ) $\dfrac{5}{8}:\dfrac{15q}{16p}$; ե) $\dfrac{5ax}{6by}\cdot\dfrac{3x}{5y}$; զ) $\dfrac{8a^2y}{5bx}:\dfrac{3ay}{4b^2x}$:

189. ա) $a\cdot\dfrac{a}{b}$; բ) $\dfrac{a}{x}:a$; գ) $\dfrac{a}{7x}\cdot 5x$;

դ) $ab:\dfrac{a}{b}$; ե) $8a:\dfrac{20a^2b}{3x}$; զ) $18p^3\cdot\dfrac{5x}{9p^2}$:

190. ա) $\dfrac{2m}{m-n}:\dfrac{3mn}{m-n}$; բ) $\dfrac{4p}{p-3}\cdot\dfrac{p-3}{2p^2}$;

գ) $\dfrac{2x+2y}{3}\cdot\dfrac{6}{x+y}$; դ) $\dfrac{4a}{a^2b}:\dfrac{5ab}{3a-3b}$;

ե) $\dfrac{m-3n}{6m}\cdot\dfrac{3mn}{4m-12n}$; զ) $\dfrac{mk}{am-an}:\dfrac{ka-k}{2m-2n}$:

191. ա) $\dfrac{mn-m^2}{2m}\cdot\dfrac{8n}{n^2-m^2}$; բ) $\dfrac{2a-4}{b+1}:\dfrac{a^2-4}{(b+1)^2}$;

գ) $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-xy}{2x^2-2y^2}$; դ) $\dfrac{16-m^2}{m^2-3m}:\dfrac{m^2+4m}{m^2-9}$:

192. ա) $\dfrac{3x^2-3y^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x+y}{6x-6y}$; բ) $\dfrac{m^2-n^2}{(m+n)^2}:\dfrac{4m-4n}{3m+3n}$:

193. ա) $\dfrac{m^3+n^3}{2m}\cdot\dfrac{4mn}{m^2-mn+n^2}$; բ) $\dfrac{m^3-n^3}{m^3+n^3}:\dfrac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$;

գ) $\dfrac{x^2+xy}{6x^2-6y^2}\cdot\dfrac{3x^3+3y^3}{x^2-xy}$; դ) $\dfrac{12a^2+6ab}{8a^3-b^3}\cdot\dfrac{4a^2+2ab+b^2}{3a^2-6ab}$:

194. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{0}{2x}$, բ) $\dfrac{0}{m-n}$:

195. Հանրահաշվական կոտորակը ներկայացրեք հանրահաշվական կոտորակների արտադրյալի տեսքով՝

ա) $\dfrac{1}{2x}$; բ) $\dfrac{a}{a^2-b^2}$; գ) $\dfrac{m}{m^3+n^3}$; դ) $\dfrac{3}{2a^2+2ab}$:

196. Հանրահաշվական կոտորակը ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով՝

ա) $\dfrac{m}{5}$; բ) $-\dfrac{a}{4}$; գ) $\dfrac{2x}{7}$;

դ) $\dfrac{2x-3}{2}$; ե) $\dfrac{x^2-3x}{10}$; զ) $\dfrac{m^2-mn+n^2}{8}$:

197. Հայտնի է, որ $\dfrac{p}{q}$ կոտորակը անկրճատելի է: Անկրճատելի՞ է արդյոք հետևյալ կոտորակը.

ա) $\dfrac{q}{p}$; բ) $\dfrac{p+q}{q}$; գ) $\dfrac{q}{p+q}$; դ) $\dfrac{p}{p+q}$:

2.6. Ռացիոնալ արտահայտություններ

Ռացիոնալ արտահայտություն կոչվում է այն արտահայտությունը, որում մի քանի հանրահաշվական կոտորակներ միացված են թվաբանական գործողությունների նշաններով: Ընդ որում այդ արտահայտությունը չպետք է պարունակի զրոյական բազմանդամի վրա բաժանման գործողություն:

Հանրահաշվական կոտորակը նույնպես անվանում են ռացիոնալ արտահայտություն:

Բերենք ռացիոնալ արտահայտությունների օրինակներ՝

$$(a-1)\left(\frac{1}{a}+2\right)-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{x+2}{(x-3)^3}+1; \qquad \frac{a}{5}-5\cdot\frac{a(b-1)^3+\dfrac{1}{a}}{b+5\cdot\dfrac{b}{a}}:$$

Նշենք, որ 178-197 առաջադրանքներում բերված բոլոր արտահայտությունները հանրահաշվական արտահայտություններ են:

Ռացիոնալ արտահայտությունները կարելի է պարզեցնել՝ օգտվելով այն կանոններից, որոնք գործում են հանրահաշվական կոտորակների համար: Ընդ որում, պետք է հաշվի առնել, որ ռացիոնալ արտահայտությունների համար ընդունված է գործողությունների կատարման այն հերթականությունը, ինչը որ կար թվային արտահայտությունների համար:

Օրինակ 1. Պարզեցնենք արտահայտությունը՝

$$\frac{1+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{6}{b}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{ab}}-\frac{\dfrac{ab}{3}}{2a+b+1}:$$

Կիրառելով հանրահաշվական կոտորակների գումարման կանոնները՝ սկզբում ձևափոխենք առաջին կոտորակի համարիչը և հայտարարը՝

$$1)\ 1+\frac{1}{a}=\frac{a}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a};$$

$$2)\ \frac{6}{b}+\frac{3}{a}+\frac{3}{ab}=\frac{6a}{ab}+\frac{3b}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{6a+3b+3}{ab}:$$

Այժմ առաջին կոտորակի համարիչը բաժանենք նրա հայտարարի վրա և կրճատենք ստացված կոտորակը՝

$$3)\ \frac{a+1}{a} : \frac{6a+3b+3}{ab} = \frac{(a+1)ab}{a(6a+3b+3)} = \frac{(a+1)b}{6a+3b+3}:$$

Երկրորդ կոտորակի համարիչը բաժանենք նրա հայտարարի վրա:

$$4)\ \frac{ab}{3} : (2a+b+1) = \frac{ab}{3(2a+b+1)} = \frac{ab}{6a+3b+3}:$$

Այժմ 3)-րդի արդյունքից հանենք 4)-րդի արդյունքը՝

$$5)\ \frac{(a+1)b}{6a+3b+3} - \frac{ab}{6a+3b+3} = \frac{ab+b-ab}{6a+3b+3} = \frac{b}{6a+3b+3}:$$

Այսպիսով, ցույց է տրված, որ

$$\frac{1+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{6}{b}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{ab}} - \frac{\dfrac{ab}{3}}{2a+b+1} = \frac{b}{6a+3b+3}:$$

Օրինակ 2. Պարզեցնենք արտահայտությունը՝

$$A = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)((x-y)^2+xy) + \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)((x+y)^2-xy):$$

Հաջորդաբար կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$A = \frac{x+y}{xy}(x^2-xy+y^2) + \frac{y-x}{xy}(x^2+xy+y^2) =$$

$$= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy} + \frac{(y-x)(x^2+xy+y^2)}{xy} =$$

$$= \frac{x^3+y^3}{xy} + \frac{y^3-x^3}{xy} = \frac{x^3+y^3+y^3-x^3}{xy} = \frac{2y^3}{xy} = \frac{2y^2}{x}:$$

Օրինակ 3. Պարզեցնենք արտահայտությունը՝

$$A = \frac{a^2}{xy} + \frac{(a+x)^2}{x^2-xy} - \frac{(a+y)^2}{yx-y^2}:$$

Հաջորդաբար կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$A = \frac{a^2}{xy} + \frac{(a+x)^2}{x(x-y)} - \frac{(a+y)^2}{y(x-y)} = \frac{a^2(x-y)+(a+x)^2y-(a+y)^2x}{xy(x-y)} =$$

$$= \frac{a^2x-a^2y+a^2y+2axy+a^2y-a^2x-2axy-xy^2}{xy(x-y)} = \frac{x^2y-xy^2}{xy(x-y)} =$$

$$= \frac{xy(x-y)}{xy(x-y)} = 1:$$

Առաջադրանքներ

198. ա) Ի՞նչն են անվանում ռացիոնալ արտահայտություն:
բ) Ո՞ր արտահայտություններն իմաստ չունեն:

Պարզեցրեք ռացիոնալ արտահայտությունը (199-204).

199. ա) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc$; բ) $3x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{y}+\frac{4}{x}\right)$:

200. ա) $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}$;

բ) $\left(\frac{a}{a-1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a-1}\right)$;

գ) $\left(m-\frac{1}{1+m}\right)\cdot\frac{m+1}{1-m-m^2}$;

դ) $\left(\frac{a+x}{x}-\frac{2x}{x-a}\right):\frac{a^2+x^2}{x-a}$;

ե) $\left(\frac{n}{n+x}-\frac{n}{n-x}\right):\left(\frac{n}{n-x}+\frac{n}{n+x}\right)$;

զ) $\frac{3}{5x}-\frac{3}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)$:

201. ա) $\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right):\left(a-\frac{1}{b}\right)$; բ) $\left(\frac{3a^2}{4b^2}-\frac{b^2}{3}\right):\left(\frac{3a}{2b}+b\right)$:

202. ա) $\frac{x+y}{x}-\frac{x}{x-y}+\frac{y^2}{x^2-xy}$;

բ) $\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m-2}-\frac{4}{m^2-4}$;

գ) $\frac{3x^2+3xy}{4xy+6ay}\cdot\left(\frac{x}{ax+ay}+\frac{3}{2x+2y}\right)$;

դ) $\left(\dfrac{c-d}{c^2+cd}-\dfrac{c}{d^2+cd}\right):\left(\dfrac{d^2}{c^3-cd^2}+\dfrac{1}{c+d}\right)$:

203. ա) $\dfrac{a-1}{2a}\cdot\left(\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{a^2-5}{a^2-1}\right)$; բ) $\left(\dfrac{14+a^2}{a^2-4}-\dfrac{a-4}{a+2}\right)\cdot\dfrac{a-2}{6}$;

գ) $\dfrac{4y}{y-1}\cdot\left(\dfrac{y}{8}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8y}\right)$; դ) $\left(\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{1-a}{1+a}\right):\dfrac{2a}{1-a}$:

204. ա) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}\cdot\dfrac{a}{a^2+ab+b^2}-(a-b)$; բ) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}:\dfrac{a+b}{a^2-b^2}+\dfrac{a^2}{a+b}$:

205. Արտահայտություններից որո՞նք իմաստ չունեն.

ա) $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$; բ) $\dfrac{7-\dfrac{x-a}{a^2-2a^2+a^2}}{x^2+a^2}$;

գ) $\dfrac{a^2+b^2-2ab}{(x-5)^2-x^2-25+10x}$; դ) $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}-\dfrac{a^2-1}{a}}$:

2.7. Ռացիոնալ արտահայտության թվային արժեքը

Դիտարկենք, օրինակ,

$$\frac{a^2+1}{a-1}+2a \qquad (1)$$

ռացիոնալ արտահայտությունը:

Եթե նրա մեջ a տառի փոխարեն տեղադրենք 3 թիվը, ապա կստանանք

$$\frac{3^2+1}{3-1}+2\cdot 3$$

թվային արտահայտությունը, որը հավասար է 11 թվին: 11 թիվն անվանում են (1) արտահայտության ***թվային արժեք*** $a = 3$ դեպքում:
Հետագայում համառոտության համար «թվային» բառը հաճախ բաց է թողնվում, բայց հասկացվում է այդպես:

$a = -1$ դեպքում (1) արտահայտության արժեքը հավասար է -3: Նույն ձևով կարելի է հաշվել (1) արտահայտության արժեքը a-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, բացառությամբ $a = 1$ արժեքի: Չէ՞ որ $a = 1$ դեպքում (1) արտահայտությունը իմաստ չունի, որովհետև պարունակում է 0-ի վրա բաժանման գործողություն՝

$$\frac{1^2+1}{1-1}+2\cdot 1:$$

Ասում են, որ (1) ***արտահայտությունը որոշված է a-ի բոլոր արժեքների համար, բացառությամբ a = 1 արժեքի:***

Որպես երկրորդ օրինակ դիտարկենք

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \qquad (2)$$

ռացիոնալ արտահայտությունը:

Վերցնենք երկու թիվ, որոնցից առաջինը տեղադրենք x-ի փոխարեն, մյուսը՝ y-ի փոխարեն: Եթե այդ դեպքում հայտարարի արժեքը հավասար չէ զրոյի, ապա կստացվի որոշակի թվային արտահայտություն, որը հավասար է որոշակի թվի: Այդ թիվն անվանում են ***(2) կոտորակի արժեք*** x***-ի և*** y***-ի տրված արժեքների համար:*** Նկատենք, որ իրարից տարբեր x-ի և y-ի ցանկացած արժեքների դեպքում (2) կոտորակը կունենա որոշակի արժեք:

Ասում են, որ ***(2) կոտորակը որոշված է*** x-ի և y-ի իրարից տարբեր բոլոր արժեքների դեպքում ($x \neq y$):

Նման կերպ սահմանվում են ցանկացած ռացիոնալ արտահայտությունների թվային արժեքները: Օրինակ՝

$$\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}-xyz$$

արտահայտությունը որոշված է x, y և z-ի ցանկացած թվային արժեքների համար, բացի $x = y = z = 0$ դեպքից, իսկ

$$\frac{1 + \dfrac{d + a}{(c - d)^2}}{a^2 + b^2 + 1}$$

արտահայտությունը որոշված է a, b, c և d-ի բոլոր թվային արժեքների համար, բացի այն արժեքներից որոնցում $c = d$:

$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ հանրահաշվական կոտորակը որոշված է նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր թվային արժեքների համար, բացառությամբ այն արժեքների, որոնց դեպքում B հայտարարը դառնում է զրո: Օրինակ՝

$$\frac{x - y - z - t}{2x - 3y}$$

կոտորակը որոշված է x, y, z և t-ի բոլոր թվային արժեքների համար, բացառությամբ այն արժեքների, որոնց համար $2x - 3y = 0$:

Խնդիր 1.* Ապացուցեք, որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ է

$$\frac{3}{x^2 + 2x + 4} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, և պարզեք, թե x-ի ինչ արժեքների դեպքում անհավասարության ձախ մասը հավասար կլինի աջ մասին:

Քանի որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ են $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$ հավասարությունը և $(x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$ անհավասարությունը, ուստի ցանկացած x թվի համար ճիշտ է

$$\frac{3}{x^2 + 2x + 4} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նկատենք, որ $(x + 1)^2 + 3 = 3$ հավասարությունը տեղի ունի միայն $x = -1$ դեպքում, ուստի անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին միայն $x = -1$ արժեքի դեպքում:

Խնդիր 2.* Ապացուցեք, որ ցանկացած x և y թվերի համար տեղի ունի

$$\frac{5}{x^2 + y^2 - 4x + 10y + 34} \leqslant 1$$

անհավասարությունը: Պարզել, թե x-ի և y-ի ինչպիսի արժեքների համար անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

Քանի որ ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ են

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 34 = (x - 2)^2 + (y + 5)^2 + 5$$

հավասարությունը և

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + 5 \geqslant 5$$

անհավասարությունը, ապա ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ է

$$\frac{5}{x^2 + y^2 - 4x + 10y + 34} \leqslant 1$$

անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:
Ակնհայտ է, որ $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 + 5 = 5$ հավասարությունը ճիշտ կլինի միայն $x = 2$ և $y = -5$ արժեքների դեպքում, ուստի անհավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին միայն $x = 2$ և $y = -5$ արժեքների դեպքում:

Առաջադրանքներ

206. Տառերի ինչպիսի՞ թվային արժեքների դեպքում հանրահաշվական կոտորակը որոշված չէ:

207. Լրացրեք աղյուսակը՝ հաշվելով արտահայտությունների թվային արժեքները x-ի տված արժեքների համար.

x	0	-2	3	10^2	10^5	$-\frac{1}{2}$	0,6
$\frac{x}{x-1}$							
$\frac{x+1}{2x-3}$							

208. a-ի և b-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\frac{a}{b}$ արտահայտությունը.
ա) հավասար է 0-ի, բ) իմաստ չունի:

209. x-ի ինչպիսի՞ թվային արժեքների համար հանրահաշվական կոտորակի արժեքը հավասար է 0-ի՝

ա) $\frac{x-2}{5}$; բ) $\frac{x+4}{x}$; գ) $\frac{2-x}{x+3}$; դ) $\frac{2x+5}{3-x}$; ե) $\frac{x^2+x}{x+1}$:

210. Գրառեք հանրահաշվական այնպիսի կոտորակ, որի արժեքը հավասար է 0-ի՝ x-ի տրված արժեքի դեպքում.

ա) 3; բ) -2; գ) 0,5; դ) $\frac{1}{3}$:

211. Գտեք արտահայտության արժեքը $x = 0$, $x = -2$, $x = 2^3$ դեպքում՝

ա) $\frac{x}{2}$; բ) $\frac{10}{x}$; գ) $\frac{2-3x}{7x}$; դ) $\frac{x-2}{2-3x}$:

212. Լրացրեք աղյուսակը.

a	4	-10	6	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-0{,}7$
b	2	20	-5	7	0	-2	1,4
$\frac{a}{b+a}$							

213. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{4-x^2}{2+x}$ եթե $x = 1{,}04$;

բ) $\frac{a^2-ab^2}{a-b}$ եթե $a = 2{,}5$, $b = \frac{1}{25}$;

գ) $\frac{9m^2+6mn+n^2}{3m+n}$, եթե $m = \frac{1}{3}$, $n = -5$;

դ) $\frac{a^3-p^3}{p-a}$, եթե $a = -\frac{1}{3}$, $p = -3$:

214. Պարզեցնելով ռացիոնալ արտահայտությունը՝ գտեք նրա արժեքը.

ա) $\left(\frac{a^2}{a+1} - \frac{a^3}{a^2+2a+1}\right) : \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a^2-1}\right)$, եթե $a = -3$;

բ) $\left(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{7} - \frac{1}{4n}\right)$, եթե $n = 3$:

215. Գտեք ռացիոնալ արտահայտության արժեքը $a = 0{,}02$, $n = -10$ դեպքում.

$$\left(\frac{n}{a}+\frac{2}{n^2}\right):\left(\frac{1}{a^2n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{an^2}\right)-a^2n:$$

216. Տառերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է որոշված արտահայտությունը.

ա) $\frac{a+b}{a}$; բ) $\frac{1}{x-1}$; գ) $\frac{c}{c+3}$; դ) $\frac{a-3}{2a-6}$:

217. Լրացրեք աղյուսակը.

a	b	$\frac{a}{b}$	$a-\frac{1}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{a^2-b^2}{a-2b}$
2	1					
−1	−3					
$\frac{1}{2}$	0,2					
0,4	$-\frac{1}{3}$					

218. Տառերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է որոշված արտահայտությունը.

ա) $\frac{3}{x^2}$; բ) $\frac{x}{x^2+y^2}$; գ) $\frac{xy-c}{m^2-n^2}$; դ) $\frac{ab+c}{p^2-q^2}$:

ե) $\frac{a+b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a}$; զ) $\frac{xy-5}{x+y}\cdot\frac{x-y}{xy}$; է) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{a-b}$:

219. Տված հանրահաշվական կոտորակներից որո՞նք են, որ x-ի ոչ մի արժեքի դեպքում ամբողջ արժեք չեն ընդունում.

$\frac{1}{x}$; $\frac{1-x}{1+x}$; $\frac{1}{x^2+4}$; $\frac{9}{x^3-1}$:

220. Տառերի ինչպիսի՞ թվային արժեքների համար տված կոտորակները հավասար են զրոյի և ինչպիսի՞ արժեքների համար որոշված չեն՝

$\dfrac{3x}{x-2}$; $\dfrac{m-38}{m}$; $\dfrac{2p-8}{p-3}$; $\dfrac{a+13}{2-3a}$:

221. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}+a+\dfrac{b}{a}$, եթե $a=3$, $b=4$;

բ) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}-a^2$, եթե $a=-3$, $b=4$;

գ) $\dfrac{xy-5}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$, եթե $x=0$, $y=-3$:

222. Պարզեցրեք արտահայտությունը և հաշվեք նրա արժեքը՝

ա) $\dfrac{3m^2+6mn+3n^2}{6n^2-6m}$, եթե $m=0{,}5$, $n=\dfrac{2}{3}$;

բ) $\dfrac{2c^2-2b^2}{4b^2-8bc+4c^2}$, եթե $b=0{,}25$, $c=\dfrac{1}{3}$;

գ) $\dfrac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\dfrac{1}{y^2-x^2}+\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$, եթե $x=0{,}35$, $y=7{,}65$;

դ) $\dfrac{x^2+25}{(x-5)^2}+\dfrac{10x}{(5-x)^3}$, եթե $x=5{,}125$:

223. x-ի ինչպիսի՞ ամբողջ արժեքների համար կոտորակի արժեքն ամբողջ թիվ է.

ա) $\dfrac{3}{x}$; բ) $\dfrac{5}{x}$; գ) $\dfrac{3}{x-1}$; դ) $\dfrac{x+2}{x+1}$;

ե) $\dfrac{4x+9}{x+2}$: զ) $\dfrac{3x+5}{x+1}$:

Լուծենք ա) և զ) առաջադրանքները:

ա) Դժվար չէ հասկանալ, որ x-ի միայն 1, –1, 3, –3 արժեքների դեպքում է, որ կոտորակի արժեքն ամբողջ թիվ է:

գ) Քանի որ

$$\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}+\frac{2}{x+1}=3+\frac{2}{x+1},$$ ուստի այդ

արտահայտության արժեքն ամբողջ թիվ է միայն $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ դեպքում:

❖ **224**. Գտեք x-ի այն ամբողջ արժեքները, որոնց համար հանրահաշվական կոտորակի արժեքը բնական թիվ է.

ա) $\frac{12}{x+5}$; բ) $\frac{x+2}{x}$; գ) $\frac{x+2}{x-5}$; դ) $\frac{x^2-x}{x+1}$:

❖ **225.** Ապացուցեք, որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ է անհավասարությունը.

ա) $\frac{2}{x^2+6x+11}\leqslant 1$; բ) $\frac{4}{x^2-10x+29}\leqslant 1$; գ) $\frac{6}{x^2+8x+22}\leqslant 1$:

Որոշեք, թե x-ի ինչ արժեքի համար անհավասարության ձախ մասը հավասար կլինի աջ մասին:

❖ **226.** Ապացուցեք, որ ցանկացած x և y թվերի համար ճիշտ է անհավասարությունը.

ա) $\frac{3}{x^2+y^2-6x+2y+13}\leqslant 1$: բ) $\frac{5}{x^2+y^2+8x-6y+30}\leqslant 1$:

Որոշեք, թե x-ի և y-ի ի՞նչ արժեքների համար անհավասարության ձախ մասը հավասար կլինի աջ մասին:

2.8. Ռացիոնալ արտահայտությունների ձևափոխություններ

Մենք արդեն զբաղվել ենք ռացիոնալ (մասնավորապես թվային) արտահայտությունների ձևափոխություններով:

Հանրահաշվական կոտորակների կարճ գրառման համար ընդունված է կիրառել բացասական ցուցիչով աստիճանը: Օրինակ, $\frac{1}{(a-b)^2}$-ի փոխարեն գրում են $(a-b)^{-2}$, $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$-ի փոխարեն՝ $(2^{-1}+3^{-1})^{-1}$:

Այդպիսի կարճ գրառումից կարելի է օգտվել ռացիոնալ արտահայտությունները ձևափոխելիս: Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 1. Ապացուցենք, որ հավասարությունը ճիշտ է.

$$(a^{-1}-b^{-1})\,(a^{-1}+b^{-1})=a^{-2}-b^{-2}$$

Նկատենք, որ հավասարության ձախ մասում գրված է a^{-1} և b^{-1} արտահայտությունների տարբերության և գումարի արտադրյալը, որը կարելի է գրել որպես այդ արտահայտությունների քառակուսիների տարբերություն՝

$$(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})=(a^{-1})^2-(b^{-1})^2=a^{-2}-b^{-2}$$

Օրինակ 2. Պարզեցնենք արտահայտությունը՝

$$\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$$

I եղանակ. Արտահայտությունը ձևափոխենք՝ օգտագործելով բնական ցուցիչով աստիճանի հատկությունը, տարբերության քառակուսու և քառակուսիների տարբերության բանաձևերը և հանրահաշվական կոտորակների հետ գործողությունների կատարման կանոնները.

$$A=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{(b-a)\cdot ab}{(b+a)\cdot ab}=\frac{b-a}{b+a}:$$

II եղանակ. Նկատենք, որ կոտորակները բացասական ցուցիչով աստիճանի տեսքով գրելուց հետո տվյալ կոտորակի համարիչում ստացվում է a^{-1} և b^{-1} արտահայտությունների տարբերության քառակուսին, իսկ հայտարարում՝ դրանց քառակուսիների տարբերությունը՝

$$A = \frac{a^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{(a^{-1} - b^{-1})^2}{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})} = \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} =$$

$$= \frac{(a^{-1} - b^{-1}) \cdot ab}{(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab} = \frac{b - a}{b + a}\text{:}$$

Օրինակ 3. Գտնել արտահայտության արժեքը.

$$\frac{(999^{-1} - 1000^{-1})(999^{-1} + 1000^{-1})}{(1000^{-1} - 999^{-1})^2}\text{:}$$

I եղանակ. 999 և 1000 հայտարարներ ունեցող կոտորակների հետ մեծածավալ հաշվարկներից խուսափելու համար նշանակենք $999 = a$, $1000 = b$ և սկզբում ձևափոխենք

$$B = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{(b^{-1} - a^{-1})^2}$$

տառային արտահայտությունը.

$$B = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{(b^{-1} - a^{-1})^2} = \frac{(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})}{(a^{-1} - b^{-1})^2} = \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} =$$

$$= \frac{(a^{-1} + b^{-1}) \cdot ab}{(a^{-1} - b^{-1}) \cdot ab} = \frac{b + a}{b - a}\text{:}$$

Ստացված արտահայտության մեջ a-ի և b-ի փոխարեն տեղադրելով համապատասխանաբար 999 և 1000, կստանանք արտահայտության որոնելի արժեքը՝

$$\frac{1000 + 999}{1000 - 999} = \frac{1999}{1} = 1999\text{:}$$

II եղանակ. Նշանակենք $999^{-1} = m$, $1000^{-1} = n$ և ձևափոխենք

$$B = \frac{(m - n)(m + n)}{(m - n)^2}$$

տառային արտահայտությունը.

$$B = \frac{(m - n)(m - n)}{(m - n)^2} = \frac{m + n}{m - n}\text{:ф}$$

Ստացված արտահայտության մեջ m-ի և n-ի փոխարեն տեղադրելով համապատասխանաբար 999^{-1} և 1000^{-1}, կստանանք արտահայտության որոնելի արժեքը.

$$\frac{999^{-1}+1000^{-1}}{999^{-1}-1000^{-1}}=\frac{\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}}{\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}}=\frac{\frac{1999}{999\cdot 1000}}{\frac{1}{999\cdot 1000}}=\frac{1999}{1}=1999:$$

Օրինակ 4. Գտնենք

$$\left(\frac{a^{-2}}{4-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\frac{a^{-2}}{4+a^{-2}}\right)^{-2}$$

արտահայտության արժեքը $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ դեպքում:

Ամենից առաջ նկատենք, որ եթե $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, ապա $a^{-2}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$:

Հետևաբար,

$$\left(\frac{a^{-2}}{4-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\frac{a^{-2}}{4+a^{-2}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{16}}{4-\frac{1}{16}}\right)^{-2}-\left(\frac{\frac{1}{16}}{4+\frac{1}{16}}\right)^{-2}=$$

$$\left(\frac{1}{4\cdot 16-1}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{4\cdot 16+1}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{63}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{65}\right)^{2}=63^2-65^2=$$

$$=(63-65)(63+65)=-256:$$

Պատ.՝ -256:

Օրինակ 5. Գտնենք

$\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\frac{x}{y}=2^{-1}$:

Քանի որ $\frac{x}{y}=2^{-1}$, ուստի $y^{-2}\neq 0$: Կոտորակի համարիչը և հայտարարը բաժանելով y^{-2}-ի, այնուհետև տեղադրելով $\frac{x}{y}$-ի արժեքը, կստանանք՝

$$\frac{x^{-2}+3y^{-2}}{5x^{-2}+2y^{-2}}=\frac{\frac{x^{-2}}{y^{-2}}+3}{5\cdot\frac{x^{-2}}{y^{-2}}+2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}+3}{5\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}+2}=\frac{(2^{-1})^{-2}+3}{5(2^{-1})^{-2}+3}=\frac{2^2+3}{5\cdot 2^2+2}=\frac{7}{22}:$$

Պատ.՝ $\frac{7}{22}$:

Առաջադրանքներ

227. Արտահայտությունը ներկայացրեք առանց բացասական ցուցիչներով աստիճանների.

ա) $a^{-1}+b^{-1}$; բ) $(a+b)^{-2}$; գ) $(a^{-2}-b^{-2})^{-1}$; դ) $(a+a^{-1})^{-1}$:

228. Հաշվեք.

ա) $5^{-1}+10^{-1}$; բ) $(0{,}5+1)^{-2}$; գ) $(2^{-4}+4^{-2})^{-1}$;
դ) $(2-2^{-1})^{-1}$; ե) $3^{-1}+9^{-1}$; զ) $(0{,}2+1)^{-1}$;
է) $(4^{-2}-4^{-3})^{-1}$; ը) $(3-3^{-1})^{-2}$:

229. Ապացուցեք, որ հավասարությունը ճիշտ է.

ա) $(a^{-1}+b^{-1})^2=a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
բ) $(a^{-1}-b^{-1})^2=a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$;
գ) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}-b^{-3}$;
դ) $(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})=a^{-3}+b^{-3}$:

230. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$; բ) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$; գ) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$; դ) $\dfrac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}+b^{-2}}$:

231. a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում արտահայտությունը հավասար կլինի 0-ի.

ա) $\dfrac{(a+3)^2}{(a-3)^{-2}}-\dfrac{(a-3)^2}{(a+3)^{-2}}$; բ) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^7-\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{-7}$:

232. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$; բ) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$;

գ) $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)^{-5}$; դ) $\left(\dfrac{a^2-a^{-2}}{a^2+a^{-2}}\right)^7:\left(\dfrac{a^2+a^{-2}}{a^2-a^{-2}}\right)^{-7}$:

ե) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$; զ) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{3}{a^2b}+\dfrac{3}{ab^2}-\dfrac{1}{b^3}}$:

233. Հաշվեք.

ա) $\dfrac{2000^{-3}-1999^{-3}}{2000^{-2}+2000^{-1}\cdot 1999^{-1}+1999^{-2}}$;

բ) $\dfrac{1222^{-3}+777^{-3}}{1222^{-2}-1222^{-1}\cdot 777^{-1}+777^{-2}}$:

❖ **234.** Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{\dfrac{2a}{1-a}}{1-\left(\dfrac{1-a}{2a}\right)^{-1}}$ բ) $\dfrac{\dfrac{2a}{2-a}}{2-\left(\dfrac{2-a}{2a}\right)^{-1}}$;

գ) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{3}{x}\right)$;   դ) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}+\left(\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{4}{x}\right)$:

❖ **235.** Գտեք արտահայտության արժեքը a-ի նշված արժեքի դեպքում.

ա) $\dfrac{2a^{-2}}{3-a^{-2}}-\dfrac{2a^{-2}}{3+a^{-2}}$, $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$,

բ) $\dfrac{2a^{-2}}{1-a^{-2}}-\dfrac{2a^{-2}}{1+a^{-2}}$, $a=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$,

գ) $\left(\dfrac{a^{-2}}{2-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{a^{-2}}{2+a^{-2}}\right)^{-2}$, $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$,

գ) $\left(\dfrac{2a^{-2}}{5-a^{-2}}\right)^{-2}-\left(\dfrac{2a^{-2}}{5+a^{-2}}\right)^{-2}$, $a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$:

❖ **236.** Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\dfrac{3x^{-2}+2y^{-2}}{2x^{-2}+3y^{-2}}$, եթե $\dfrac{x}{y}=2^{-1}$ բ) $\dfrac{3x^{-2}-2y^{-2}}{2x^{-2}-3y^{-2}}$, եթե $\dfrac{x}{y}=3^{-1}$:

2.9. Ռացիոնալ արտահայտությունների նույնական հավասարությունը

2.3-2.8 կետերում դիտարկվել են ռացիոնալ արտահայտությունների հավասարություններ: Ահա այդպիսի հավասարություններից մեկը՝

$$\frac{a^2+a+1}{a-3}=\frac{(a^2+a+1)(a-1)}{(a-3)(a-1)}: \qquad (1)$$

Նրա ձախ մասը որոշված է a-ի՝ 3-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար, իսկ աջ մասը որոշված է a-ի՝ 3-ից և 1-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար: Այդ դեպքում (1) հավասարության երկու մասերը որոշված են a-ի՝ 3-ից և 1-ից տարբեր բոլոր թվային արժեքների համար: Ավելին, a-ի յուրաքանչյուր այդպիսի արժեքի դեպքում (1) հավասարության ձախ և աջ մասերի թվային արժեքներն իրար հավասար են:

Իրոք, եթե (1) հավասարության մեջ a տառը փոխարինենք 3-ից և 1-ից տարբեր ցանկացած թվով, ապա կստանանք ստույգ թվային հավասարություն. չէ՞ որ այդ դեպքում ձախ մասը մի թվային կոտորակ է, իսկ աջ մասը՝ թվային կոտորակ, որը ստացվել է նրա համարիչը և հայտարարը միևնույն՝ զրոյից տարբեր թվով բազմապատկելով:

Ահա ևս մեկ օրինակ՝

$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}: \qquad (2)$$

(2) հավասարությունը վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության x-ի բոլոր այն թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում որոշված են ձախ և աջ մասերը (այսինքն՝ 2-ից և 3-ից տարբեր x-երի համար), որովհետև այդ դեպքում այն արտահայտում է սովորական կոտորակների գումարման կանոնը:

Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների հավասարությունն անվանում են ***նույնություն*** կամ ***նույնական հավասարություն,*** եթե այն վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր այն թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում այդ երկու արտահայտությունները որոշված են:

Վերևում ցույց տրվեց, որ (1) և (2) հավասարությունները նույնություններ են: Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների ցանկացած այլ հավասարության համար կարելի է անել նման տիպի դատողություններ:

Այսուհետ «Ապացուցել, որ հավասարությունը ճիշտ է նրանում մասնակցող տառերի բոլոր թույլատրելի արժեքների դերքում» նախադասությունը (ճշմարիտ պնդումը) կարող ենք փոխարինել «Ապացուցել նույնությունը» համառոտ բառակապակցությամբ:

Նույնությունները ապացուցելիս օգտվում են այն կանոններից, որոնց ենթարկվում են հանրահաշվական կոտորակները: Ընդ որում, ամեն անգամ նկատի է առնվում, որ ապացուցվող հավասարությունը ճիշտ է տառերի այն արժեքների համար, որոնց դեպքում ձախ և աջ մասերը որոշված են (⌈այդ արժեքները անվանում են նաև ***փոփոխականների թույլատրելի արժեքների բազմություն (ԹԱԲ*** հակիրճ անվանմամբ)⌋):

Երբեմն լրացուցիչ նշում են դիտարկվող նույնության մեջ մտնող տառերի այն թվային արժեքները, որոնց համար որոշված են հավասարության երկու մասերը:

Օրինակ 1. Ապացուցենք նույնությունը՝

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=0: \qquad (3)$$

Ապացուցում: Տառերի բոլոր արժեքների համար, որոնց դեպքում ձախ մասը որոշված է, ունենք՝

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{x+y}{(x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}-\frac{2y}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x+y-(x-y)-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{x+y-x+y-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{0}{(x-y)(x+y)}=0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նշենք, որ (3) նույնության երկու մասերը որոշված են x-ի և y-ի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում $|x| \neq |y|$:

Օրինակ 2.* Ապացուցենք նույնությունը՝

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=0: \qquad (4)$$

Ապացուցում: Տառերի բոլոր թվային արժեքների համար, որոնց դեպքում (4) հավասարության ձախ մասը որոշված է, ունենք՝

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(z-x)(y-x)}=$$

$$=\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(y-z)(x-z)}-\frac{1}{(x-z)(x-y)}=$$

$$=\frac{x-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}-\frac{x-y}{(x-y)(y-z)(x-z)}-\frac{y-z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=$$

$$=\frac{x-z-(x-y)-(y-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{x-z-x+y-y+z}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{0}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Օրինակ 3. Ապացուցենք նույնությունը՝

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^2 - b^2}{a - b}: \qquad (5)$$

Ապացուցում: Տառերի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում (5) հավասարության երկու մասերը որոշված են, ունենք՝

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} - \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} =$$

$$= a - b - (a + b) = a - b - a - b = -2b;$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} - \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} =$$

$$= a - b - (a + b) = a - b - a - b = -2b:$$

Հետևաբար (5) հավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին տառերի բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում հավասարության երկու մասն էլ իմաստ ունեն: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Դիտողություն: Այս կետում բերված նույնության սահմանումը չի հակասում ամբողջ արտահայտությունների նույնական հավասարության նախկինում բերված սահմանմանը, որովհետև ամբողջ արտահայտությունը որոշված է նրա մեջ մտնող տառերի բոլոր թվային արժեքների համար:

Առաջադրանքներ

237. Երկու ռացիոնալ արտահայտությունների ինչպիսի՞ հավասարությունն են անվանում նույնություն:

238. Բերեք միայն x տառը պարունակող երկու բազմանդամների հավասարության այնպիսի օրինակ, որը լինի նույնություն:

239. Բերեք x պարունակող երկու արտահայտությունների այնպիսիգ հավասարության օրինակ, որի ձախ մասը որոշված լինի 0-ից և 1-ից տարբեր x-ի բոլոր արժեքների համար, իսկ աջ մասը՝ x-ի՝ 0-ից տարբեր բոլոր արժեքների համար, և այն դառնա նույնություն:

240. Տառերի ի՞նչ արժեքների դեպքում են որոշված հավասարության երկու մասերը: Նույնությո՞ւն են արդյոք հետևյալ հավասարությունները.

ա) $a+b=b+a$;

բ) $ab+ac=a\,(b+c)$;

գ) $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a$;

դ) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;

ե) $\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$;

զ) $x-y=\frac{x^2-y^2}{x+y}$;

է) $\frac{m^3+m}{m^2+1}=m$;

ը) $\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{1}{a-b}$:

Ապացուցեք նույնությունը (241-244).

241. ա) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot(x^2-2x+1)=\frac{2x-2}{x+1}$;

բ) $\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\cdot(x^2-4x+4)=\frac{4x-8}{x+2}$:

242. ա) $\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=0$;

բ) $\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=0$;

գ) $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{y}=2$;

դ) $\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{x}=2$:

❖ **243.** ա) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(a-c)(b-a)}=0$;

բ) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

գ) $\frac{a^4-b^4}{((a+b)^2-4ab)((a-b)^2+4ab)((a+b)^2-2ab)}=\frac{1}{a^2-b^2}$:

❖ **244.** ա) $\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\left(\frac{6a+b}{a^2-b^2}:\frac{6a^3+b^3+a^2b+6ab^2}{2ab^2-2a^2b}+\frac{a+b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2+b^2}{ab\,(a+b)}$;

բ) $\left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{y}{x^2-xy}\right):\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{y(x-y)}$;

գ) $\left(\dfrac{2x^2y + 2xy^2}{7x^3 + x^2y + 7xy^2 + y^3} \cdot \dfrac{7x + y}{x^2 - y^2} + \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}\right) \cdot (x^2 - y^2) = x + y;$

դ) $\left(\dfrac{5}{a^2 - 2a - ax + 2x} - \dfrac{1}{8 - 8a + 2a^2} \cdot \dfrac{20 - 10a}{x - 2}\right) : \dfrac{25}{x^3 - 8} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{5(a - x)};$

245. Կրճատեք կոտորակը.

ա) $\dfrac{8a^2c + 16abc - 4ac^2}{6bc^2 - 12abc - 24b^2c};$ բ) $\dfrac{30m^2k - 70mnk - 40mk^2}{56n^2k + 32nk^2 - 24mnk};$

գ) $\dfrac{15a^3bc - 30a^2b^2c + 15ab^3c}{12a^3c^2 - 12ab^2c^2};$ դ) $\dfrac{80m^2n^3k^2 - 20m^4nk^2}{16m^3nk^2 - 64m^2n^2k^2 + 64mn^3k^2}$։

Պարզեցրեք արտահայտությունը (246, 247).

246. ա) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a};$ բ) $\dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{2b};$ գ) $\dfrac{3}{x - a} - \dfrac{x}{x - a};$

դ) $\dfrac{3b}{(b - 1)^2} + \dfrac{2}{1 - b};$ ե) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 4} + \dfrac{4}{x - 2};$

թ) $\dfrac{3x}{x^2 - 2x + 1} - \dfrac{6}{x^2 - 1} - \dfrac{3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$։

247. ա) $\dfrac{ba^2}{(1 - a)^2} - \dfrac{b}{(a - 1)^2};$ բ) $\dfrac{2a}{(a - 1)^3} + \dfrac{1 + a^2}{(1 - a)^3}$։

248. Տրված կոտորակը ձևափոխեք կոտորակների գումարի.
Օրինակ՝

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{8x}{x} + \frac{4}{x} = 3x - 8 + \frac{4}{x}).$$

ա) $\dfrac{m + n}{3};$ բ) $\dfrac{1 - 2x}{x};$

դ) $\dfrac{3a - 8b}{ab};$ դ) $\dfrac{4y - 9y^2}{12y};$

ե) $\dfrac{5x^3 + 2x^2 - x - 8}{2x};$ զ) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2};$

249. A, B և C-ի փոխարեն ընտրեք այնպիսի ամբողջ արտահայտություններ, որ ստացվի ճիշտ հավասարություն, և պարզեցրեք ստացված կոտորակը՝

ա) $\dfrac{a-1}{a+1}+\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{(a-1)(a-1)+(a+1)(a+1)}{\text{A}}$;

բ) $\dfrac{m}{3m-1}+\dfrac{2m}{5-2m}=\dfrac{m(5-2m)+2m(3m-1)}{\text{A}}$;

գ) $\dfrac{\text{B}}{x+2}-\dfrac{\text{C}}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-1)+3x(x+2)}{\text{A}}$;

դ) $\dfrac{\text{B}}{p-q}-\dfrac{\text{C}}{p^2-q^2}=\dfrac{(p+q)(p+q)-2pq}{\text{A}}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (250-253).

250. ա) $\left(\dfrac{x^2y-xy^2}{x-y}+xy\right)\cdot\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$;

բ) $\left(\dfrac{n}{m-n}+\dfrac{m}{m+n}\right)\cdot\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{n^2}{m^2}-2\right)$;

գ) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}+4x\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$;

դ) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$;

ե) $\dfrac{4x-3}{3-2x}-\dfrac{4+5x}{3+2x}-\dfrac{3+x-10x^2}{4x^2-9}$:

251. ա) $\dfrac{x^5}{x^2-6x+9}\cdot\dfrac{x^2-9}{x^3+3x^2}-\dfrac{3x^5+81x^2}{x^2}:(x^2-9)$;

բ) $\left(\dfrac{m+2}{8-8m+2m^2}+\dfrac{1}{4-2m}-\dfrac{2}{m^2-4m+4}\right)\cdot 3m-3m$;

գ) $\left(\dfrac{2}{a^2-4a+4}-\dfrac{1}{4-2a}-\dfrac{a+2}{2(2-a)^2}\right)\cdot 5a-5a$;

դ) $\left(\dfrac{1}{2-4c}+\dfrac{1+c}{8c^3-1}:\dfrac{1+2c}{4c^2+2c+1}\right)\cdot\dfrac{4c-2}{2c+1}-\dfrac{1}{(1+2c)^2}$;

252. ա) $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y}{x+2y}+\dfrac{x^2+3xy-2y^2}{4y^2-x^2}$;

բ) $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}-\dfrac{x^2-x+1}{x^3+1}$:

253. ա) $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{a-\dfrac{1}{b}}$; բ) $\dfrac{m-\dfrac{1}{n}}{n+\dfrac{1}{m}}$; գ) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$; դ) $\dfrac{\dfrac{1}{1-m}+\dfrac{1}{1+m}}{\dfrac{1}{1-m}-\dfrac{1}{1+m}}$:

254. Հայտնի է, որ $x+\dfrac{1}{x}$-ը ամբողջ թիվ է: Ապացուցեք, որ տրված արտահայտությունը նույնպես ամբողջ թիվ է.

ա) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ բ) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

255. Ներկայացրեք կոտորակների տարբերության տեսքով՝

ա) $\dfrac{1}{1\cdot 2}$; բ) $\dfrac{1}{3\cdot 4}$; գ) $\dfrac{1}{x(x+1)}$; դ) $\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$:

❖ **256.** Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{9\cdot 10}$;

բ) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$;

գ) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 100}$:

Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է (257, 258).

❖ **257** $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}<1$:

❖ **258** $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}<\dfrac{1}{2}$:

❖ **259.** Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$;

բ) $\dfrac{1}{x(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+4)} + \dfrac{1}{(x+4)(x+6)} + \dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$:

Ապացուցեք նույնությունը (260, 261).

260. ա) $\left(\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right) = x + y$;

բ) $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 2\right) : \left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x}{x-y}$;

գ) $\left(m + 1 - \dfrac{1}{1-m}\right) : \left(m - \dfrac{m^2}{m-1}\right) = -m$;

դ) $\left(a - \dfrac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\dfrac{a}{a+b} - \dfrac{b}{b-a} - \dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right) = a - b$:

261. ա) $\left(\dfrac{m^2+2m}{4m^2-n^2} - \dfrac{1}{2m+n}\right) : \dfrac{m^2+n}{20m^2+10mn} + \dfrac{5n}{n-2m} = 5$;

բ) $\left(\dfrac{2a}{a^2-16} - \dfrac{4}{4+a}\right) \cdot \dfrac{a+4}{8-a} + \dfrac{a^2}{32-8a} = -\dfrac{a+4}{8}$;

գ) $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2} + \dfrac{x+y}{xy-y^2}\right) + \dfrac{x}{x+y} = 1$;

դ) $\left(\dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{a-b}{a^2+ab}\right) : \left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2} + \dfrac{1}{a+b}\right) = \dfrac{a}{b} - 1$:

❖ **262.** Դիոֆանտի «Թվաբանություն»-ում (III դ.) պարունակվում են շատ նույնություններ: Ապացուցեք դրանցից երկուսը, որոնք տրված են ժամանակակից գրառմամբ.

ա) $\dfrac{144}{x^4-60x^2+900} \cdot 30 + \dfrac{60}{x^2-30} = \dfrac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900}$;

բ) $\dfrac{96}{x^4-12x^2+36} - \dfrac{12}{6-x^2} = \dfrac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36}$:

❖ **263.** Ապացուցեք Լ. Էյլերի նույնությունը՝

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3:$$

264. Տառերի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում տված կոտորակը հավասար կլինի 0-ի.

ա) $\frac{x}{x^2 + 2}$; բ) $\frac{6m}{m - 8}$; գ) $\frac{a - 4}{a + 1}$;

դ) $\frac{2y - 5}{y^2}$; ե) $\frac{3x + 7}{2x - 5}$; զ) $\frac{6 - 9x}{5 + 4x}$:

Գտեք արտահայտության արժեքը (265, 266).

265. ա) $\frac{7}{5a + 5} - \frac{3}{10a + 10}$, եթե $a = 10$;

բ) $\frac{2a - 1}{2a} - \frac{2a}{2a - 1} - \frac{1}{2a - 4a^2}$, եթե $a = -\frac{1}{2}$:

❖ **266.** ա) $\left(\frac{x - 2}{x^2 - 2x + 4} - \frac{6x - 13}{x^3 + 8}\right) : \frac{15 - 5x}{2x^3 + 16}$, եթե $x = 3{,}5$;

բ) $\left(\frac{x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{4x + 5}{x^3 + 1}\right) : \frac{2 - x}{4x^2 - 4x + 4}$, եթե $x = 0{,}6$;

գ) $\frac{8a^3 - 27b^3}{(3b + 2a)^2 - 6ab}$, եթե $a = 2{,}5$; $b = -1\frac{2}{3}$;

դ) $\frac{64a^3 + 8b^3}{(2a - b)^2 + 2ab}$, եթե $a = -0{,}25$; $b = 1\frac{7}{8}$:

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

$$0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,(17) = \frac{17}{99}$$

$$0,1010010001... = ?$$

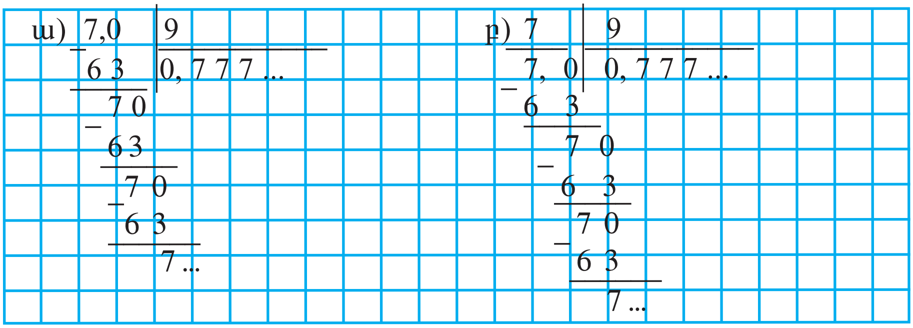
3.1 Պարբերական տասնորդական կոտորակներ

5-րդ և 6-րդ դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացից դուք արդեն ծանոթ եք բնական և ամբողջ թվերին, ինչպես նաև սովորական և տասնորդական կոտորակներին: Դուք գիտեք, թե ինչպես են համեմատում վերջավոր (այսինքն՝ ստորակետից հետո վերջավոր հատ թվանշաններ պարունակող) տասնորդական կոտորակները, ինչպես են դրանց հետ կատարում թվաբանական գործողություններ և կլորացնում (մոտարկում) այդ թվերը: Գիտեք նաև, որ տասնորդական կոտորակների քանորդը միշտ չէ, որ կարելի է գրել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով: Հայտնի է նաև, թե ինչպես են տասնորդական կոտորակը փոխարինում սովորական կոտորակով և սովորական կոտորակը՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Ընդ որում՝ եթե վերջավոր տասնորդական կոտորակը ներկայացվի $\frac{p}{q}$ անկրճատելի սովորական կոտորակի տեսքով, ապա նրա q հայտարարը 2-ից և 5-ից բացի այլ պարզ բաժանարարներ չի ունենա, և հակառակը. եթե անկրճատելի $\frac{p}{q}$ կոտորակի q հայտարարը 5-ից և 2-ից բացի այլ պարզ բաժանարար չունի, ապա այդ կոտորակը կարելի է ներկայացնել վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով: Այստեղից հետևում է, որ ***եթե անկրճատելի*** $\frac{p}{q}$ ***կոտորակի հայտարարը 2-ից և 5-ից տարբեր պարզ արտադրիչ ունի, ապա այդ կոտորակը չի վերածվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի:***

Նշանակում է՝ այդ դեպքում անկյունաձև p-ն q-ի բաժանելու միջոցով չի կարող ստացվել վերջավոր տասնորդական կոտորակ:

Օրինակ 1. $\frac{7}{9}$-ը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

Դա անկրճատելի կոտորակ է, որի հայտարարն ունի 2-ից ու 5-ից տարբեր՝ 3 պարզ արտադրիչը: Այդ պատճառով էլ այն չի կարող վերածվել վերջավոր տասնորդական կոտորակի: Այնուամենայնիվ, այդ կոտորակի համարիչն անկյունաձև բաժանենք հայտարարին (նկ. 7 ա, այդ բաժանման մի այլ գրառում ցույց է տրված նկ. 7 բ-ում):



Նկ. 7

Բաժանման յուրաքանչյուր փուլում ստացվում է միևնույն 7 մնացորդը, իսկ քանորդում՝ միևնույն 7 թվանշանը: Այդ գործընթացն անվերջ է (վերջ չունի): Այն հանգեցնում է 0,777... արտահայտությանը, որտեղ բազմակետերը նշանակում են, որ 7 թվանշանը կրկնվում է անվերջ անգամ:

0,777... արտահայտությունն անվանում են ***անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ*** կամ պարզապես ***պարբերական կոտորակ:*** Այն գրառում են նաև 0,(7) ձևով և կարդում են՝ «զրո ամբողջ, 7-ը պարբերության մեջ»: 7 թիվն անվանում են 0,(7) կոտորակի ***պարբերություն:***

Ասում են, որ $\frac{7}{9}$-ը գրառված է 0,(7) պարբերական կոտորակի տեսքով, կամ որ 0,(7)-ը $\frac{7}{9}$-ը թվի ***տասնորդական ներկայացումն է:*** Գրառվում է՝

$$\frac{7}{9} = 0{,}777... = 0{,}(7):$$

Պետք է նկատի ունենալ, որ $\frac{7}{9}$-ը և 0,(7)-ը միևնույն թվի տարբեր գրառումներ են. սովորական կոտորակի տեսքով և անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Օրինակ 2. $\frac{2}{99}$ թիվը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

$\frac{2}{99}$ կոտորակն անկրճատելի է, և նրա հայտարարը 2-ից ու 5-ից տարբեր պարզ բաժանարար ունի: Այդ պատճառով այն չի կարող վերածվել վերջավոր տասնորդական կոտորակի: Այդ կոտորակի համարիչն անկյունաձև բաժանենք նրա հայտարարին.

$$\begin{array}{r|l} -\;2{,}0000 & 99 \\ \cline{2-2} 1\,98 & 0{,}0202... \\ \cline{1-1} -\;200 & \\ 198 & \\ \cline{1-1} 2 & \\ ... & \end{array}$$

Բաժանման այդ գործընթացն անվերջ է. այն հանգեցնում է 0,0202... պարբերական կոտորակի ստացմանը: Թվանշանների (02) խումբը պարբերությունն է: Այս պարբերական կոտորակը գրառում են՝ 0,(02) և կարդում այսպես՝ «զրո ամբողջ, զրո երկուսը պարբերության մեջ»:

Ասում են, որ $\frac{2}{99}$ -ը ներկայացված է 0,(02) պարբերական կոտորակի տեսքով, կամ 0,(02) պարբերական կոտորակը $\frac{2}{99}$ թվի տասնորդական վերլուծությունն է: Գրառվում է՝

$$\frac{2}{99} = 0{,}0202... = 0{,}(02):$$

Օրինակ 3: $\frac{143}{45}$ թիվը վերածենք տասնորդական կոտորակի:

$\frac{143}{45}$ կոտորակի համարիչն անկյունաձև բաժանելով նրա հայտարարին՝ կստանանք՝

$$\frac{143}{45} = 3{,}1777... = 3{,}1(7):$$

Այս հավասարության աջ մասը կարդացվում է հետևյալ կերպ՝ «երեք ամբողջ մեկ տասնորդական և յոթը պարբերության մեջ»:

Ընդհանրապես, եթե դրական անկրճատելի կոտորակի համարիչն անկյունաձև բաժանենք նրա հայտարարին, ապա քանորդում կստացվի այդ կոտորակի տասնորդական վերլուծությունը՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակի կամ պարբերական կոտորակի տեսքով:

Դրական պարբերական կոտորակի առջև «–» նշան դնելով կստանանք նրան հակադիր բացասական պարբերական կոտորակ: Օրինակ՝ $-0{,}(7) = -\frac{7}{9}$:

$-0{,}(7)$ պարբերական կոտորակը կլինի $-\frac{7}{9}$ թվի տասնորդական վերլուծությունը:

Վերջավոր տասնորդական կոտորակին աջից անվերջ թվով 0-ներ կցագրելով կամ ամբողջ թվին աջից ստորակետ ու ապա անվերջ թվով 0-ներ կցագրելով՝ ստանում ենք (0) պարբերությամբ անվերջ տասնորդական կոտորակ, որը համարվում է սկզբնական թվի գրառումը պարբերական կոտորակի տեսքով:

Օրինակ՝

$$27 = 27{,}000... = 27{,}(0),$$
$$0{,}354 = 0{,}354000... = 0{,}354(0),$$
$$-3{,}1 = -3{,}1000... = -3{,}1(0),$$
$$0 = 0{,}000... = 0{,}(0):$$

Հետևապես՝ ***ցանկացած ամբողջ թիվ և ցանկացած վերջավոր տասնորդական կոտորակ կարելի է համարել (0) պարբերությամբ պարբերական կոտորակ:***

Դիտողություն. Կարելի է համոզվել, որ կոտորակի համարիչը հայտարարի վրա անկյունաձև բաժանման դեպքում 9 պարբերությամբ տասնորդական կոտորակ չի կարող ստացվել, դրա համար էլ 9 պարբերությամբ տասնորդական կոտորակներ սովորաբար չեն դիտարկում:

Այնուամենայնիվ օգտակար է իմանալ, որ, օրինակ՝

$$0{,}5(0) = 0{,}5000.... \text{ և } 0{,}4(9) = 0{,}4999...$$

տասնորդական կոտորակները միևնույն՝ $\frac{1}{2}$ ռացիոնալ կոտորակի երկու տարբեր վերլուծություններն են տասնորդական կոտորակի տեսքով: (Այդ մասին ավելի հանգամանալից կնշվի հանրահաշվի հետագա դասընթացում):

Եվ այսպես՝ ***ցանկացած*** $\frac{p}{q}$ ***ռացիոնալ թիվ վերածվում է պարբերական կոտորակի:*** Կարելի է նաև ցույց տալ, ***որ ցանկացած պարբերական կոտորակ ինչ-որ ռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծություն է:***

Առաջադրանքներ

267. Անկրճատելի սովորական կոտորակը ո՞ր դեպքում չի վերածվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի:

268. Ի՞նչ եղանակով կարելի է ցանկացած սովորական կոտորակ վերածել տասնորդականի:

269. Ինչպիսի՞ տասնորդական կոտորակներ կարելի է ստանալ սովորական կոտորակի համարիչը նրա հայտարարին անկյունաձև բաժանման դեպքում:

270. Ինչպե՞ս իմանալ, թե սովորական կոտորակն ինչ տասնորդական կոտորակի կվերածվի՝ վերջավոր, թե՞ անվերջ: Բերե՛ք համապատասխան օրինակներ:

271. Վերջավոր տասնորդական կոտորակը կամ ամբողջ թիվն ինչպե՞ս կարելի է գրառել պարբերական կոտորակի տեսքով: Բերե՛ք օրինակներ:

272. Տրված թիվը ներկայացրեք պարբերական կոտորակի տեսքով, նշեք պարբերությունը.

ա) $\frac{1}{3}$; բ) $\frac{2}{9}$; գ) $\frac{12}{5}$; դ) 12;

ե) $\frac{24}{30}$; զ) $\frac{36}{48}$; է) $\frac{4}{7}$; ը) $\frac{45}{63}$;

թ) $\frac{1}{6}$; ժ) $\frac{2}{6}$; ի) $\frac{3}{6}$; լ) $\frac{4}{6}$;

խ) $\frac{20}{41}$; ծ) $\frac{15}{37}$; կ) $\frac{5}{21}$:

273. Տրված սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի՝ համարիչը հայտարարին անկյունաձև բաժանելու եղանակով.

ա) $\frac{1}{9}$; բ) $\frac{2}{9}$; գ) $\frac{3}{9}$; դ) $\frac{4}{9}$:

274. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի.

ա) $\frac{5}{9}$; բ) $\frac{6}{9}$; գ) $\frac{7}{9}$; դ) $\frac{8}{9}$:

275. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի և նշեք նրա պարբերությունը.

ա) $\frac{12}{99}$; բ) $\frac{23}{99}$; գ) $\frac{34}{99}$; դ) $\frac{45}{99}$:

276. Սովորական կոտորակը վերածեք պարբերականի.

ա) $\frac{56}{99}$; բ) $\frac{67}{99}$; գ) $\frac{78}{99}$; դ) $\frac{89}{99}$:

277. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքներից՝ պարբերական կոտորակը ներկայացրեք սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) 0,(1); բ) 0,(3); գ) 0,(5); դ) 0,(7);
ե) 0,(25); զ) 0,(37); է) 0,(10); ը) 0,(05):

3.2. Անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներ

Դիտարկենք

0,10110111011110...

դրական անվերջ տասնորդական կոտորակը, որում ստորակետից հետո գրված են՝ 1, 0, երկու հատ 1, 0, երեք հատ 1, 0 և այդպես շարունակ՝ միմյանց հաջորդող ամեն երկու 0-ների արանքում ներառելով մեկով ավելի 1-եր, քան նախորդ արանքում: Թվանշանների ոչ մի խումբ այս կոտորակի համար չի կարող լինել պարբերություն: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ այդ կոտորակն ունի պարբերություն, ապա թվանշանների այդ խումբը (պարբերությունը) պետք է պարունակի գոնե մեկ հատ 0 (այլապես կստացվեր, որ այդ թվի թվանշանները, սկսած մի ինչ որ կարգից, բոլորը 1 են): Սակայն ինչպիսին էլ որ լինի պարբերության երկարությունը (պարբերության մեջ պարունակվող թվանշանների քանակը), այս թվի թվանշանների մեջ կարելի է նշել անթիվ բազմությամբ իրար հաջորդող թվանշանների խմբեր, որոնք բաղկացած են միայն 1-երից: Այս կոտորակը ոչ պարբերական է և հետևապես չի կարող լինել որևիցե ռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունը:

Ահա դրական անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակների ևս երկու օրինակ.

0,01001000100001..., 17,123456789101112...:

Առաջին կոտորակում ստորակետից հետո գրված է՝ 0, 1, երկու հատ 0, 1, երեք հատ 0, 1 և այդպես շարունակ: Երկրորդում ստորակետից հետո աճման կարգով գրված են բոլոր բնական թվերը:

Դրական կոտորակի առջև «–» նշան դնելով՝ ստանում ենք բացասական կոտորակ: Օրինակ՝

–0,01001000100001..., –17,123456789101112...

կոտորակները բացասական անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներ են:

Անվերջ տասնորդական կոտորակներն անվանում են թվեր:

Թիվը, որ կարելի է գրել անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով, անվանում են իռացիոնալ (ոչ ռացիոնալ) թիվ:

Եթե իռացիոնալ թիվը նշանակվում է տառով, օրինակ՝

$a = 0{,}01001000100001\ldots$,

ապա ասում են, որ այդ հավասարության աջ մասը a թվի տասնորդական վերլուծությունն է:

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերը միասին անվանում են իրական թվեր:

Յուրաքանչյուր իրական թիվ ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով: Եթե թիվը ռացիոնալ է, ապա այդ կոտորակը պարբերական է, եթե թիվն իռացիոնալ է, ապա կոտորակը ոչ պարբերական է:

Ինչպես և վերջավոր տասնորդական կոտորակների դեպքում էր, դրական անվերջ տասնորդական կոտորակի՝ մինչև ստորակետը գտնվող թիվը անվանում են այդ ***կոտորակի ամբողջ մաս:***

Անվերջ տասնորդական կոտորակի՝ ստորակետից հետո գտնվող առաջին թվանշանը անվանում են նրա ***առաջին կարգի թվանշան,*** ստորակետից հետո գտնվող երկրորդ թվանշանը՝ ***երկրորդ կարգի թվանշան,*** երրորդը՝ երրորդ կարգի թվանշան և այլն:

Զրոյից տարբեր կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակի գրառման համար օգտագործում են տառեր:

Դիցուք տված է դրական անվերջ տասնորդական կոտորակ: Նրա ամբողջ մասը նշանակենք α_0-ով: Պարզ է, որ α_0-ն զրո է կամ բնական թիվ: Առաջին կարգի թվանշանը նշանակենք α_1-ով, երկրորդ կարգի թվանշանը՝ α_2-ով, երրորդ կարգի թվանշանը՝ α_3-ով և այլն: Արդյունքում մեր դրական անվերջ տասնորդական կոտորակը կգրվի այսպես՝

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots.,$$

ընդ որում α_0 թիվը կամ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ թվանշաններից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, այլապես այդ թիվը կլիներ զրո:

Դրական անվերջ տասնորդական կոտորակի առջև դնելով «–» նշան՝ կստանանք բացասական անվերջ տասնորդական կոտորակ՝

$$-\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ldots$ և $-\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\ldots$ թվերը (անվերջ տասնորդական կոտորակները) անվանում են իրար ***հակադիր թվեր:***

Եթե իրար հակադիր թվերից մեկը նշանակենք a-ով, ապա մյուսը նշանակում են $-a$-ով:

Եթե a-ն դրական թիվ է, ապա $(-a)$-ն բացասական է, եթե a-ն բացասական թիվ է, ապա $-a$-ն դրական է, իսկ եթե $a = 0$, ապա $-a$-ն նույնպես զրո է՝ $-a = 0$:

a իրական թվի բացարձակ արժեք (կամ մոդուլ) անվանում են հենց ինքը՝ a թիվը, եթե a-ն դրական թիվ է, զրո, եթե a-ն զրո է, $(-a)$ թիվը, եթե a-ն բացասական թիվ է:

a իրական թվի բացարձակ արժեքը նշանակում են $|a|$-ով:

Այսպիսով,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ եթե } a > 0 \\ 0, \text{ եթե } a = 0 \\ -a, \text{ եթե } a < 0 \end{cases}$$

Օրինակ, դիցուք

$$a = 0{,}101101111\ \ldots$$
$$b = -2{,}1234567891011\ldots$$
$$c = 0{,}(0):$$

Այդ դեպքում

$$|a| = 0{,}101101111...$$
$$|b| = 2{,}1234567891011...$$
$$|c| = 0:$$

Առաջադրանքներ

278. Ո՞ր թիվն են անվանում.

ա) ռացիոնալ, բ) իռացիոնալ, գ) իրական:

279. Արդյոք ամեն մի ռացիոնալ թիվ իրական թիվ է:

280. Նշեք անվերջ ոչ պարբերական կոտորակի (իռացիոնալ թվի) հինգ օրինակ:

281. Գոյություն ունի՞ ռացիոնալ թիվ, որը հավասար լինի անվերջ ոչ պարբերական կոտորակի:

282. Ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ է հետևյալ թիվը.

ա) 0,275; բ) 0,(2);
գ) 1,(32); դ) 1,15 (45);
ե) 3,10110111011110... *(յուրաքանչյուր հաջորդ՝ հարևան զույգ 0-ների միջև 1-երի քանակն ավելանում է 1-ով)*;
զ) 0,123456789101112... *(ստորակետից հետո գրառված են համարվում անմիջական կարգով գրված բոլոր բնական թվերը)*:

283. Նշեք չորս թիվ, որոնք լինեն.

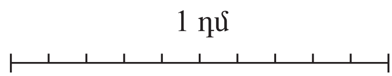
ա) բնական, բ) դրական,
գ) բացասական, դ) ամբողջ,
ե) ռացիոնալ, զ) իռացիոնալ,
է) զույգ, ը) կենտ,
թ) պարզ, ժ) բաղադրյալ,
ի) 3-ի բազմապատիկ, լ) 2-ի և 5-ի բազմապատիկ:

284. Նշեք երկու թիվ, որոնք լինեն.

ա) ռացիոնալ և բացասական, բ) ամբողջ և 5-ի բազմապատիկ,
գ) ամբողջ և դրական, դ) պարզ և 30-ից մեծ,
ե) բաղադրյալ և զույգ, զ) կենտ և 7-ի բազմապատիկ:

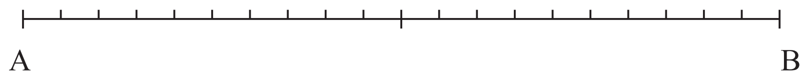
3.3. Հատվածի երկարություն

Դիտարկենք հատվածի երկարության չափման մի քանի օրինակներ: Որպես միավոր հատված (երկարության միավոր) վերցնենք 1 դմ-ը (նկ. 8): Այս կետում բոլոր նկարները կատարված են 1 : 2 մասշտաբով:



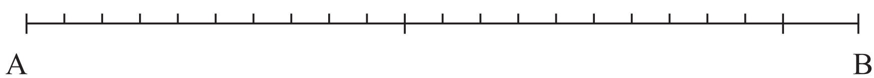
Նկ. 8

Օրինակ 1. Նկար 9-ում պատկերված AB հատվածն ունի 2 դմ երկարություն, այսինքն՝ AB հատվածում 1 դմ-ը տեղավորվում է ճիշտ 2 անգամ: Գրում են՝ AB = 2 դմ:



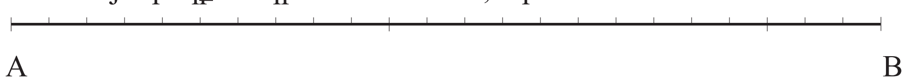
Նկ. 9

Օրինակ 2. Նկար 10-ում պատկերված AB հատվածում 2 դմ-ը ազատ տեղավորվում է, ու բացի դրանից մնում է 1 դմ-ից փոքր մի հատված: Այս դեպքում ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2 դմ է մինչև 1 դմ ճշտությամբ՝ պակասորդով: Գրում են՝ AB ≈ 2 դմ:



Նկ. 10

Օրինակ 3. Նկար 11-ում պատկերված AB հատվածում տեղավորվում է 2 դմ և բացի դրանից մնում է 1 դմ-ից փոքր մի հատված, որում տեղավորվում է ճիշտ 3 սմ: Այս դեպքում գրում են՝ AB = 2,3 դմ:



Նկ. 11

Օրինակ 4. Նկար 12-ում պատկերված AB հատվածում տեղավորվում է 2 դմ և մնում է 1 դմ-ից փոքր հատված, որում տեղավորվում է 3 սմ և մնում է ևս 1 սմ-ից փոքր հատված: Այս դեպքում AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2,3 դմ է մինչև 0,1 դմ ճշգրտությամբ՝ պակասորդով:
Գրում են՝ AB ≈ 2,3 դմ:

Նկ. 12

Օրինակ 5. Եթե, օրինակ, նկ. 12-ի վերջում մնացած 1 սմ-ից փոքր հատվածում տեղավորվում է ճիշտ 4 մմ, ապա գրում են՝ AB = 2,34 դմ:

Օրինակ 6. Եթե, օրինակ, նկ. 12-ի վերջում մնացած 1 սմ-ից փոքր հատվածում 4 մմ տեղավորելուց հետո մնում է ևս 1 մմ-ից փոքր հատված,ապա ասում են, որ AB հատվածի երկարությունը մոտավորապես 2,34 դմ է մինչև 0,01 դմ ճշգրտությամբ՝ պակասորդով: Գրում են՝ AB ≈ 2,34 դմ:

1-6 օրինակներում նկարագրված եղանակով հատվածների երկարությունները կարելի է չափել նաև երկարության ցանկացած այլ միավորով՝ 1 սմ, 1 մ, 1 կմ, ...:

Օրինակ 7. Եթե երկարության տրված միավորով AB հատվածի երկարության չափման արդյունքում ստացվել է 0,2305, ապա դա նշանակում է, որ այդ երկարությունը փոքր է միավոր հատվածի (երկարության միավորի) երկարությունից, AB հատվածում տեղավորվում է 0,2 միավոր, մնացած հատվածում տեղավորվում է 0,03 միավոր, և մնում է մի հատված, որում տեղավորվում է ճիշտ 0,005 միավոր:

Եթե ընտրված միավորով տրված AB հատվածի երկարության չափման ընթացքում նրա տասնորդական, հարյուրերորդական, հազարերորդական և այլ բաժիններն ստանալու փուլից հետո դեռևս ավելորդ հատված է մնում, ապա AB հատվածի երկարությունը միայն մոտավոր կարտահայտվի վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Իսկ նրա ճշգրիտ երկարությունն այս դեպքում կարտահայտվի անվերջ տասնորդական կոտորակով՝

$$AB = a_0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6...:$$

Այստեղ a_0-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 1 միավոր ճշգրտությամբ՝ պակասորդով: a_0, a_1-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 0,1 ճշտությամբ՝ պակասորդով: a_0, a_1a_2-ն AB-ի մոտավոր երկարությունն է մինչև 0,01 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով և այլն:

Օրինակ 8. Եթե AB = 3,(07) = 3,070707..., ապա AB հատվածի մոտավոր երկարությունը հավասար է.

3 մինչև 1 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով,

3,0 մինչև 0,1 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով,

3,07 մինչև 0,01 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով,

3,070 մինչև 0,001 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով և այդպես շարունակ:

Քանի որ

$$3{,}(07) = 3\frac{7}{99},$$

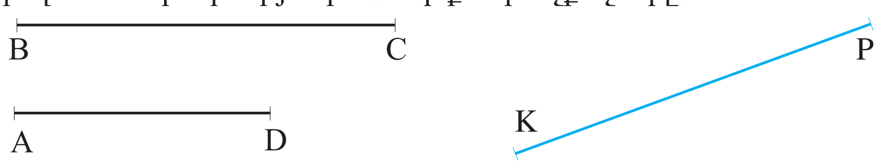
ապա 3,(07) թիվն այն հատվածի երկարությունն է, որում տեղավորվում է 3 միավոր և ևս $\frac{7}{99}$ միավոր:

Սակայն սովորական չափիչ սարքերը հարմարեցված են հաշվարկի տասական համակարգին. երկարության միավորը բաժանվում է 10, 100,1000, ... հավասար մասերի: Դրա համար էլ տրված երկարության հատվածը, օրինակ, քանոնի միջոցով պատկերելու համար օգտվում են նրա՝ տասնորդական կոտորակով արտահայտված մոտավոր երկարությունից: Այսպես, օրինակ 8-ի դեպքում կարելի էր վերցնել AB ≈ 3,07:

Դիտողություն. Ավելի վաղ մտցվել էր հատվածի երկարության չափման հասկացությունը, բայց միայն այն դեպքում, երբ այդ երկարությունն արտահայտվում է ռացիոնալ թվով: Այս կետում տրվեց կամայական հատվածի երկարության հասկացությունը. այդ երկարությունը կարող է արտահայտվել ինչպես ռացիոնալ, այնպես էլ իռացիոնալ թվով: Ամփոփելով արդյունքները՝ կարելի է ասել, որ կամայական AB հատված ունի երկարություն՝ արտահայտված որևէ դրական *a* թվով: Ճշմարիտ է նաև հակառակ պնդումը. յուրաքանչյուր *a* դրական թվի համար կարելի է նշել AB հատված, որի երկարությունը *a* է:

Առաջադրանքներ

285. Նկար 13-ում պատկերված են BC, AD, KP հատվածները: Աչքաչափով որոշեք յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը սանտիմետրերով: Քանոնի օգնությամբ ստուգեք ձեր աչքաչափը:



Նկ. 13

286. Տետրում գծեք կամայական երեք հատված և կատարեք նախորդ առաջադրանքի պահանջները:

287. Տետրում գծեք 3,5 սմ, 5 սմ և 6,5 սմ երկարություններով երեք հատված: Յուրաքանչյուր հատվածն աչքաչափով բաժանեք երեք հավասար մասերի: Քանոնի օգնությամբ ստուգեք ձեր աչքաչափը:

288. Կառուցեք 8,5 սմ երկարությամբ հատված: Աչքաչափով այդ հատվածը տրոհեք հինգ հավասար մասերի, վեց հավասար մասերի:

289. Նկար 14-ում պատկերված են AB և CD հատվածները: Որպես չափման միավոր ընդունելով CD հատվածը՝ աչքաչափով մինչև 1 ճշգրտությամբ պակասորդով որոշեք AB հատվածի երկարությունը: Ստուգեք ձեր աչքաչափը կարկինի օգնությամբ:

Նկ. 14

290. AB հատվածի երկարությունն արտահայտվում է 5,375 թվով: Գրեք AB հատվածի մոտավոր երկարությունը պակասորդով մինչև 1, մինչև 0,1,մինչև 0,01 ճշգրտությամբ:

291. AB հատվածի երկարությունը հավասար է.

ա) $3\,\frac{1}{8}$;   բ) $2\,\frac{5}{16}$;   գ) $3\,\frac{61}{99}$;   դ) $4\,\frac{14}{27}$:

AB հատվածի երկարությունն արտահայտեք տասնորդական կոտորակով մինչև 1, մինչև 0,1, մինչև 0,01 ճշգրտությամբ՝ պակասորդով:

292. AB հատվածի երկարությունը $3\,\frac{19}{99}$ է: Պակասորդով արտահայտեք այդ երկարությունը տասնորդական կոտորակով նշված ճշգրտությամբ.

ա) 0,1,   բ) 0,01,   գ) 0,001,   դ) 0,0001:

3.4. Իրական թվերի համեմատումը և դրանց հետ կատարվող թվաբանական գործողությունները

Դիցուք՝ տրված են երկու անվերջ տասնորդական կոտորակներ (կհամարենք, որ նրանց պարբերությունը 9 չէ):

Անվերջ տասնորդական կոտորակները համեմատելիս առաջնորդվում են հետևյալ կանոններով.

Կանոն 1. ***Երկու անվերջ տասնորդական կոտորակներ (այսինքն՝ իրական թվեր) իրար հավասար են, եթե նրանք ունեն նույն նշանը, և նրանց մոդուլներն ունեն միևնույն ամբողջ մասը և համապատասխան կարգերում նույն թվանշանները:***

Մնացած դեպքերում անվերջ տասնորդական կոտորակները համարվում են իրարից տարբեր (ոչ հավասար):

Այս կանոնից միակ բացառությունն է 0 թիվը, որը չի փոխվում, եթե նրա առջև դնենք «–» կամ «+» նշանը՝

$$0 = 0{,}000\ldots = -\,0{,}000\ldots = +\,0{,}000\ldots$$

Կանոն 2. ***Բացասական անվերջ տասնորդական կոտորակը փոքր է 0-ից և փոքր է ցանկացած դրական անվերջ տասնորդական կոտորակից: 0 թիվը փոքր է ցանկացած դրական տասնորդական կոտորակից:***

Կանոն 3. ***Եթե երկու դրական տասնորդական կոտորակների ամբողջ մասերն իրարից տարբեր են, ապա այն կոտորակն է մեծ, որի ամբողջ մասը մեծ է: Իսկ եթե ամբողջ մասերը իրար հավասար են, ապա դիտարկվում են ստորակետից հետո այն ամենափոքր կարգը, որտեղ այդ թվերի թվանշանները իրարից տարբեր են. այն կոտորակն են համարում մեծ, որի՝ այդ կարգում գրված թվանշանը մեծ է:***

Երկու բացասական տասնորդական կոտորակներից մեծը այն է, որի մոդուլն ավելի փոքր է:

Եթե a և b իրական թվերը (անվերջ տասնորդական կոտորակները) հավասար են, ապա գրում են՝ $a = b$: Եթե a-ն փոքր է b-ից, գրառում են՝ $a < b$ կամ $b > a$: Վերջապես, եթե a-ն հավասար չէ b, ապա գրառում են՝ $a \neq b$:

Օրինակ. Համեմատենք $-3,1$ և $-3(1)$ թվերը:

Քանի որ $|-3,1| = 3,1 = 3,1000...$, իսկ $|-3,(1)| = 3,(1) = 3,111....$, ուստի $-3,1$ և $-3(1)$ թվերի մոդուլներն ունեն միևնույն ամբողջ մասը՝ 3: Այդ թվերի՝ ստորակետից հետո առաջին կարգի թվանշանները նույնպես իրար հավասար են (1 են), սակայն առաջին կոտորակի երկրորդ կարգի թվանշանը՝ 0-ն, փոքր է երկրորդ կոտորակի երկրորդ կարգի թվանշանից՝ 1-ից, ուստի առաջին կոտորակի մոդուլը փոքր է երկրորդ կոտորակի մոդուլից՝ $3,1 < 3,(1)$: Քանի որ այդ կոտորակները բացասական են, հետևաբար, ըստ համեմատման կանոնի՝

$-3,1 > -3(1)$:

Անվերջ տասնորդական կոտորակների գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման կանոններն ավելի բարդ են, քան վերջավոր տասնորդական կոտորակների համապատասխան կանոնները. այդ կանոնների խիստ հիմնավորումները տրվում են բուհերում դասավանդվող «Մաթեմատիկական անալիզ» առարկայի դասընթացում, և, բնականաբար, դրանց ճշգրիտ ձևակերպումները այստեղ մենք չենք բերում: Մենք ուղղակի կհամարենք, որ կամայական երկու իրական թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը (եթե բաժանարարը զրո չէ) իրական թիվ է, ընդ որում միակը: Գործնականում անվերջ տասնորդական կոտորակների (այսինքն իրական թվերի) հետ թվաբանական գործողությունները կատարում են մոտավոր, ճիշտ այնպես, ինչպես վարվում են երկու վերջավոր տասնորդական կոտորակների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը մոտավորապես հաշվելիս (այդ եղանակին դուք ծանոթ եք 6-րդ դասարանի «Մաթեմատիկա» առարկայի դասընթացից):

Անվերջ տասնորդական կոտորակներով տրվող իրական թվերը նույնպես մոտարկում են վերջավոր տասնորդական կոտորակներով: Հենց անվերջ տասնորդական կոտորակի գրառման եղանակը հուշում է, թե այդ մոտարկումներն ինչպես պետք է ընտրել: Դիտարկենք օրինակ:

Դիցուք՝ $A = 2,3(28) = 2,3282828...$

Եթե այս կոտորակի գրառումն ընդհատենք ստորակետից հետո երկրորդ կարգի թվանշանով, ապա կստանանք 2,32 թիվը, որը, ըստ իրական թվերի համեմատման վերը նշված կանոն 3-ի, փոքր է a-ից:

Եթե 2,32-ի հարյուրերորդականների թվանշանն ավելացնենք 1-ով, ապա կստանանք 2,33 թիվը, որը մեծ է a-ից (ըստ կանոն 3-ի):

Այսպիսով $2,32 < a < 2,33$, ուրեմն 2,32-ը a-ի մոտարկումն է ներքևից, իսկ 2,33-ը՝ վերևից, ընդ որում գրում են՝ $a \approx 2,32$, $a \approx 2,33$ և ասում՝

«2,32-ը a ***թվի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ պակասորդով (ներքևից), 2,33-ը*** a ***թվի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ հավելուրդով (վերևից)***»:

«Մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ» բառերի փոխարեն նաև ասում են «ստորակետից հետո երկրորդ կարգի միավորի ճշգրտությամբ»:

Քանի որ a թվի գրելաձևում ստորակետից հետո երրորդ թվանշանը մեծ է 5-ից, ապա a-ն ավելի մոտ է 2,33-ին, քան 2,32-ին: Այդ նկատառումով էլ ասում են, որ 2,33-ը a-ի մոտարկումն է մեկ հարյուրերորդականի ճշտությամբ՝ կլորացումով:

Նույն կերպ դատելով՝ կստանանք, որ

$$2{,}328 < a < 2{,}329,$$
$$a \approx 2{,}328, \quad a \approx 2{,}329,$$

որտեղ 2,328-ը a-ի մոտարկումն է մեկ հազարերորդականի ճշգրտությամբ ներքևից և միևնույն ժամանակ՝ կլորացումով: Դա հետևում է նրանից, որ a թվի գրելաձևում ստորակետից հետո չորրորդ կարգի թվանշանը 5-ից փոքր է, դրա համար էլ a-ն 2,328-ին ավելի է մոտ, քան 2,329-ին:

2,329-ը a-ի մոտարկումն է 0,001 ճշգրտությամբ վերևից:

Հանգունորեն, $2{,}3282 < a < 2{,}3283$: Այժմ a-ն վերևից և ներքևից մոտարկումների ճիշտ մեջտեղում է: Այսպիսի դեպքում է 2,3283-ն ընդունվում որպես a թվի մոտարկում 0,0001 ճշգրտությամբ՝ կլորացումով:

Նման եղանակով $b = -2{,}32829$-ի համար ճիշտ են $-2{,}33 < b < -2{,}32$ անհավասարությունները, որտեղից $b \approx -2{,}33$ և $b \approx -2{,}32$, ընդ որում $-2{,}33$-ը b թվի մոտարկումն է 0,01 ճշգրտությամբ ներքևից և միաժամանակ՝կլորացումով: Իսկ $-2{,}32$-ը b թվի մոտարկումն է 0,01 ճշգրտությամբ վերևից:

Ներմուծենք տասնորդական կոտորակի ***նշանակալից թվանշանի*** հասկացությունը:

Տասնորդական կոտորակի նշանակալից թվանշան են անվանում նրա առաջին՝ զրոյից պարբեր թվանշանը (ձախից աջ), ինչպես նաև հաջորդ բոլոր թվանշաններից յուրաքանչյուրը:

Օրինակներ՝

235 000 թվի բոլոր թվանշանները նշանակալից են,

0,(302) թվի գրառման մեջ նշանակալից են ստորակետից հետո գրված բոլոր թվանշանները,

0,003004 թվի մեջ նշանակալից են 3 թվանշանից սկսած բոլորը:

0,101101110... թվի գրառման մեջ նշանակալից են ստորակետից հետո գրված բոլոր թվանշանները:

Կլորացնել թիվը, օրինակ, մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշտությամբ՝ նշանակում է կլորացնել այն մինչև այն կարգը, որում գտնվում է այդ թվանշանը՝ հաջորդ թվանշանները փոխարինելով զրոներով: Ստորև բերված կլորացումները կատարված են մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը.

$$3{,}7523 \approx 3{,}7500 = 3{,}75;$$
$$-0{,}010278 \approx -0{,}010300 = -0{,}0103;$$

$0{,}035021$ և $0{,}035000 = 0{,}0350$;
$1{,}(73) = 1{,}7373... \approx 1{,}74$;
$-0{,}02339 \approx -0{,}0234$;
$2\ 365\ 780 \approx 2\ 370\ 000 = 2{,}37 \cdot 10^6$;
$2\ 35\ 000 \approx 235\ 000 = 2{,}35 \cdot 10^5$:

Թվերը պատշաճ ձևով մոտավորությամբ գումարելու, հանելու, բազմապատկելու և բաժանելու համար պետք է նախապես նրանք ճիշտ կլորացնել: Ինչպես դա անել՝ կպարզաբանենք տասնորդական կոտորակի տեսքով գրված թվերի համար:

Երկու թվերի գումարը (կամ տարբերությունը) մոտավորությամբ հաշվելու համար այդ թվերը կլորացնում են նույն ճշգրտությամբ (օրինակ՝ մեկ հարյուրերորդականի), ապա գումարում (կամ հանում) են ստացված մոտավորությունները:

Օրինակ 1. $a = 23{,}1834(567)$ և $b = -4{,}2375101101110...$ թվերը նախապես կլորացնելով մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ՝ մոտավորությամբ հաշվենք նրանց գումարն ու տարբերությունը:

Լուծում: Կլորացնելով այդ թվերը մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ՝ կստանանք, որ $a \approx 23{,}18$, $b \approx -4{,}24$: Այստեղից էլ կգտնենք պատասխանը.

$$a + b \approx 18{,}94; \quad a - b \approx 27{,}42:$$

Համանման ձևով են վարվում նաև այն դեպքերում, երբ հանման և գումարման գործողությունները պետք է կատարել՝ կլորացնելով մինչև մեկ տասնորդական, մինչև մեկ հազարերորդական, մինչև մեկ տասնյակ, մինչև մեկ հազար և այլ ճշգրտությամբ:

Ստորև կձևակերպենք մինչև որևէ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ կլորացումով՝ մոտավորությամբ բազմապատկման ու բաժանման կանոնը:

Երկու թվերի արտադրյալը (կամ երկու թվերի քանորդը) մոտավորությամբ հաշվելու համար նախ պետք է այդ թվերը կլորացնել մինչև միևնույն նշանակալից թվանշանի (օրինակ՝ մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի) ճշգրտությամբ, բազմապատկել (կամ բաժանել) ստացված մոտավորությունները և արդյունքը կլորացնել մինչև այդ նույն (երրորդ) նշանակալից թվանշանը:

Օրինակ 2. Դիցուք՝ $a = 135{,}78665$, $b = 0{,}00687(51)$:

Կլորացնելով մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը՝ մոտավորությամբ հաշվենք $a \cdot b, \dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}$ արտահայտությունները:

Լուծում: Կլորացնելով մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը՝ կունենանք.

$$a \approx 136, \; b \approx 0{,}00688:$$

Այդ դեպքում.

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936;$$
$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = \frac{13600000}{688} = 19767{,}4... \approx 19800;$$
$$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058... \approx 0{,}0000506:$$

Պատասխան՝ $a \cdot b \approx 0{,}936$; $\frac{a}{b} \approx 19800$; $\frac{b}{a} \approx 0{,}0000506$:

Դիտողություն. Մեծ ճշգրտությունը պահանջում է մեծ քանակությամբ թվանշանների օգտագործում, փոքր ճշգրտության համար բավական են նաև քիչ քանակությամբ թվանշանները:

Որքան մեծ թվով թվանշաններով վերցնենք երկու թվերի մոտարկումները, այնքան մոտարկումների գումարը (տարբերությունը, արտադրյալը, քանորդը) մոտ կլինի այդ երկու թվերի գումարին (տարբերությանը, արտադրյալին, քանորդին):

Օրինակ՝ ենթադրենք՝ տրված է $a = 1{,}44(5)$ թիվը և պահանջվում է հաշվել նրա քառակուսին: Եթե այդ թիվը, ապա նաև նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև առաջին նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ, կստանանք $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, որը ճշգրիտ արդյունքից տարբերվում է

$$2{,}088025 - 1 = 1{,}088025$$

թվով:

Եթե a թիվն ու նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ, ապա կստանանք՝

$$a^2 \approx 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \approx 2{,}0,$$

որը ճշգրիտ արդյունքից տարբերվում է $2{,}088025 - 2 = 0{,}088025$ թվով:

Իսկ եթե թիվն ու նրա մոտարկման քառակուսին կլորացնենք մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ, ապա կստացվի

$$a^2 \approx 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 2{,}1025 \approx 2{,}10,$$

որը ճշգրիտ արդյունքից կտարբերվի ընդամենը $2{,}088025 - 2{,}10 \approx 0{,}0120$-ով:

Նշենք իրական թվերի այն հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով:

Ցանկացած a, b և c իրական թվերի համար ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝

1) $a + b = b + a$ ***(գումարման տեղափոխելիության օրենքը)***,
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ***(գումարման զուգորդական օրենքը),***
3) $a \cdot b = b \cdot a$ ***(բազմապատկման տեղափոխելիության օրենքը),***

4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ***(բազմապատկման զուգորդական օրենքը),***
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ***(բաշխական օրենքը),***
6) $a + 0 = a$,
7) $a + (-a) = 0$,
8) $a - b = a + (-b)$,
9) $a \cdot 1 = a$,
10) $a \cdot 0 = 0$,
11) $-a = (-1) \cdot a$,
12) $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ (եթե $a \neq 0$) $\left(\dfrac{1}{a}\right.$-ն կոչվում է a թվի **հակադարձ**$\left.\right)$,
13) $a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ (եթե $b \neq 0$):

Առաջադրանքներ

293. Ի՞նչ է նշանակում $\approx$ նշանը: Ինչպե՞ս են կարդում $a \approx a_1$ գրառումը:

294. Նշե՛ք 0,2638 թվի մոտարկումը:

ա) մեկ տասնորդականի ճշգրտությամբ պակասորդով,
բ) մեկ հարյուրերորդականի ճշգրտությամբ հավելուրդով,
գ) մեկ հազարերորդականի ճշգրտությամբ կլորացումով:

295. Թվի տասնորդական տեսքով գրառման մեջ ո՞ր թվանշաններն են անվանում նշանակալից:

296. Ի՞նչ է նշանակում թիվը կլորացնել մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ:

297. Գտե՛ք a թվի մոտարկումը պակասորդով՝ ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշգրտությամբ, եթե.

ա) $a = 0{,}3456$; բ) $a = 0{,}76543$;
գ) $a = 0{,}02325$; դ) $a = -0{,}34354$:

298. Գտե՛ք a թվի մոտարկումը հավելուրդով՝ ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշգրտությամբ, եթե.
ա) $a = 1{,}2345$; բ) $a = 3{,}56789$; գ) $a = 2{,}577$; դ) $a = 2{,}555$:

299. a թիվը կլորացրե՛ք 0,01 ճշգրտությամբ, եթե.
ա) $a = 1,24851$; բ) $a = 1,24158$;
գ) $a = -7,02303$; դ) $a = 0,12528$:

300. a թիվը կլորացրեք 0,001 ճշգրտությամբ, եթե.
ա) $a = 8,91011...$; բ) $a = -8,91011...$;
գ) $a = 0,2626$; դ) $a = 0,6265$:

301. Ընդգծեք տրված թվի նշանակալից թվանշանները.
ա) 3,52; բ) 0,352; գ) 0,03520; դ) 7,405;
ե) 4,203; զ) 0,005; է) 0,0420; ը) 7,0003;
թ) 10,0050; ժ) 6,700; ի) 0,00067; լ) 0,0100:

302. 1995, 1996 թիվը կլորացրեք մինչև նշված ճշգրտությամբ.
ա) մեկ տասնորդական, բ) մեկ հարյուրերորդական,
գ) մեկ հազարերորդական, դ) մեկ միավոր,
ե) մեկ տասնյակ, զ) մեկ հարյուրյակ:

303. 1039, 930(1) թիվը կլորացրեք մինչև յոթերորդ, վեցերորդ, հինգերորդ, չորրորդ, երրորդ նշանակալից թվանշանը:

304. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր գումարման կանոնը մինչև մեկ հազարերորդականի ճշգրտությամբ կլորացման համար:

305. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր հանման կանոնը մինչև մեկ տասնորդականի ճշգրտությամբ կլորացման համար:

306. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր բազմապատկման կանոնը մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ կլորացման համար:

307. Ձևակերպեք տասնորդական կոտորակների տեսքով տրված երկու թվերի մոտավոր բաժանման կանոնը մինչև չորրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ կլորացման համար:

308. Մինչև 0,1 ճշգրտությամբ կլորացրեք a ու b թվերը և հաշվեք նրանց մոտավոր գումարն ու մոտավոր տարբերությունը, եթե.
ա) $a = 3,28$, $b = 0,11$; բ) $a = -1,256$, $b = 2,555$;
գ) $a = 0,010010$, $b = 0,2$; դ) $a = 2,7235$, $b = -3,42426$;

ե) $a = -7{,}17$, $b = -0{,}33$;

զ) $0{,}100100010... + 0{,}238$;

է) $2{,}7(3) + 3{,}(42)$:

309. Մինչև 0,01 ճշգրտությամբ կլորացրեք a ու b թվերը և հաշվե՛ք նրանց մոտավոր գումարն ու տարբերությունը, եթե.

ա) $a = 1{,}4545$, $b = -1{,}203$;

բ) $a = 2{,}1264$, $b = -3{,}1145$;

գ) $a = -5{,}777$, $b = 2{,}536$;

դ) $a = 0{,}5642$, $b = -3{,}573$;

ե) $a = -12{,}454$, $b = -10{,}111$;

զ) $7 - 0{,}(3)$;

է) $1{,}(45) - 1{,}2$;

ը) $2{,}1264 - 3{,}(1)$;

թ) $5{,}(7) - 2{,}(5)$:

310. Մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ կլորացնելով a ու b թվերը՝ մոտավոր հաշվեք նրանց արտադրյալը և $a : b$ քանորդը, եթե.

ա) $a = -2{,}435$, $b = 1{,}923$;

բ) $a = 2{,}1456$, $b = 0{,}78788$;

գ) $a = -2{,}131$, $b = -0{,}009293$;

դ) $a = 0{,}03531$, $b = 357{,}693$;

ե) $a = 0{,}56$, $b = 0{,}(3)$;

զ) $a = 0{,}(1)$, $b = 0{,}(2)$;

է) $a = 12{,}(45)$, $b = 10{,}(1)$:

311. Մոտավոր հաշվեք արտադրյալը և $a : b$ քանորդը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանի ճշգրտությամբ կլորացումով, եթե.

ա) $a = 0{,}253$, $b = 0{,}75$;

բ) $a = 3{,}5781$, $b = -0{,}00494$;

գ) $a = -0{,}045$, $b = -0{,}593$;

դ) $a = 382{,}231$, $b = 0{,}002434$;

ե) $a = 0{,}(2)$, $b = 2$;

զ) $a = 4{,}(2)$, $b = 1{,}(3)$;

է) $a = 45{,}6(12)$, $b = 10{,}(2)$:

312. Ո՞ր դեպքում են a և b իրական թվերն իրար հավասար:

313. Ո՞ր դեպքում a և b իրական թվեր իրար հավասար չեն:

314. Ձևակերպեք իրական թվի և զրոյի համեմատման կանոնը:

⊙ **315.** Ինչպե՞ս են համեմատում.

ա) դրական իրական թվերը,

բ) բացասական իրական թվերը:

316. Դիցուք՝ $|a| = |b|$. Ո՞ր դեպքում $a \neq b$:

❖ **317.** Ո՞ր դեպքում.

ա) եթե $a > b$, ապա $|a| > |b|$;

բ) եթե $a > b$, ապա $|a| < |b|$:

318. Կարո՞ղ է արդյոք թիվը.
ա) մեծ լինել իր մոդուլից,
բ) հավասար լինել իր մոդուլին,
գ) փոքր լինել իր մոդուլից:
Եթե այո, ապա բերեք օրինակներ:

319. Չկատարելով բոլոր հաշվարկները՝ բացատրեք, թե ինչո՞ւ է հավասարությունը ճիշտ.
ա) $0 \cdot \left|-5\dfrac{1}{3}\right| < 3{,}(4) \cdot 5{,}1$; բ) $(-12{,}98) \cdot 0 > 5{,}(8) \cdot (-4{,}6)$;
գ) $2{,}(5) \cdot \left|-2\dfrac{1}{13}\right| < 3{,}(4) \cdot 5{,}(1)$; դ) $(5{,}(6) - 5{,}(6)) \cdot > -6{,}7 \cdot 8{,}9$;
ե) $(-3{,}(7) + 3{,}(7)) \cdot 8{,}98 < -8{,}1 \cdot \left|-4\dfrac{1}{7}\right|$:

320. Ցույց տվեք կրկնակի անհավասարության ճիշտ լինելը.
ա) $0{,}75757 < 0{,}(75) < 0{,}75758$;
բ) $3{,}023023 < 3{,}(023) < 3{,}023024$:

Համեմատեք թվերը (321, 322).

321. ա) 2,42424242... և –2,42424242...; բ) 0 և –10,(4);
գ) 5,4444444... և 5,5444444...; դ) 0,1(1) և 0,(2);
ե) 0,333333 և $\dfrac{1}{3}$; զ) $\dfrac{1}{9}$ և 0,(1);
է) –4,313131... և –4,31311311131...; ը) 0,(27) և $\dfrac{3}{10}$:

322. ա) 5 և 5,(1); բ) 0,(23) և 0,234; գ) 1,2456 և 1,24563;
դ) 1,2456 և 1,(3); ե) 0,545454 և0,(54); զ) 0,(4) և 0,(45):

323. Թվերը դասավորեք աճման կարգով.
ա) –0,142536, –2,(7), 0,125, 0,1(25);
բ) 1,(5), 0,(12), –2(778):

324. Թվերը դասավորեք նվազման կարգով՝
$\dfrac{1}{9}$; –4,7(5); 0,1115; –4,7556; $\dfrac{1}{8}$; 0,124:

325. Ճի՞շտ է արդյոք կրկնակի անհավասարությունը.

ա) $106{,}727272 \leqslant 106{,}(72) < 106{,}727273$;

բ) $-0{,}313132 < -0{,}(31) \leqslant -0{,}313131$:

326. 2,(1) և 2,111 թվերի համար նշեք գոնե մի թիվ, որը նրանցից մեկից մեծ է, իսկ մյուսից՝ փոքր:

❖ **327.** a և b թվերը բացասական են և $|a| < |b|$: Համեմատեք թվերը.

ա) a և 0; բ) $-b$ և 0; գ) $-b$ և a;
դ) b և $-a$; ե) $-b$ և $-a$; զ) a և $|b|$:

⊙ **328.** Կպահպանվի արդյոք անհավասարության նշանը, եթե նրա երկու մասերը բազմապատկենք բացասական թվով կամ զրոյով: Բերեք օրինակներ:

329. Նշեք մի որևէ թիվ, որը գտնվում է տված a և b թվերի միջև՝

ա) $a = 2{,}3$; $b = 2{,}4$; բ) $a = 3{,}2$; $b = 3{,}(2)$;
գ) $a = -3{,}15$; $b = -3{,}14$; դ) $a = -5{,}(3)$; $b = -5{,}(21)$:

330. Ինչ որ մեկը մտահղացել մի թիվ, որը մեծ է a-ից, բայց փոքր է b-ից: Ճի՞շտ է արդյոք, որ $a < b$:

Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը (331, 332).

331. ա) $3{,}5 + 2{,}729 < 3{,}6 + 2{,}729$; բ) $-3{,}21 + 0{,}(4) < -3 + 0{,}(4)$;

գ) $-5{,}6 + 3{,}2 < -5{,}1 + 3{,}(2)$; դ) $5 + 0{,}1 < 5{,}1 + 0{,}10110111...$:

332. ա) $3{,}7 \cdot 0{,}8 < 3{,}8 \cdot 0{,}8$; բ) $-5{,}1 \cdot 0{,}(3) < -5 \cdot 0{,}(3)$;

գ) $-4{,}7(1) \cdot 0{,}5 < -4{,}7 \cdot 0{,}5$; դ) $-3{,}(8) \cdot 0{,}5 < -3{,}8 \cdot 0{,}(5)$:

⊙ **333.** Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը.

ա) $3\frac{1}{3} + 0{,}(2) = 0{,}(2) + 3\frac{1}{3}$;

բ) $(-5{,}1\ 3{,}(3)) + 7 = -5{,}1 + (3{,}(3) + 7)$;

գ) $(-5{,}4 \cdot (-7)) \cdot 2 = -5{,}4 \cdot ((-7) \cdot 2)$:

334. Հաշվեք (334, 335).

ա) $3,(27) \cdot 5 - 3,(27) \cdot 4$;
բ) $5,(21) \cdot 7 + 5,(21) \cdot 3$;
գ) $3,(5) \cdot 7,3 - 7,3 \cdot 3,(5)$;
դ) $2,(7) \cdot 5,41 - 5,41 \cdot 2,(7)$;
ե) $13,(13) - 13,(13)$;
զ) $-1 \cdot 3,(51)$;
է) $0 \cdot 5,1234567...$;
ը) $1 \cdot (-5,1234567...)$;
թ) $1 \cdot \frac{17}{19}$;
ժ) $3 \cdot \frac{1}{3}$;
ի) $-3,4 \cdot \frac{1}{-3,4}$;
լ) $-5 \cdot \frac{1}{8}$;
խ) $11,101101110... + (-11,101101110...)$:

335. ա) $(3,2 + (-1,7)) + 1,7$;
բ) $(5,9 + (-0,(7))) + 0,(7)$;
գ) $(5,4 \cdot 1,7) \cdot \frac{1}{1,7}$;
դ) $(-2,(95) \cdot 5,28) \cdot \frac{1}{5,28}$:

336. Գտեք *a* թվի մոտարկումը պակասորդով՝
ա) $a = 0,(2)$ 0, 001 ճշգրտությամբ,
բ) $a = 1,1234567891011...$ 0,01 ճշգրտությամբ
գ) $a = 12,0(1)$ 0,1 ճշգրտությամբ:

337. Գտեք *a* թվի մոտարկումը հավելուրդով.
ա) $a = -0(3)$ ստորակետից հետո երրորդ կարգի 1 միավորի ճշգրտությամբ,
բ) $a = -1,2777$ ստորակետից հետո երկրորդ կարգի 1 միավորի ճշգրտությամբ,
գ) $a = -12,0(01)$ թիվը ստորակետից հետո առաջին կարգի 1 միավորի ճշգրտությամբ:

338. Թիվը կլորացրեք 0,01 ճշգրտությամբ.
ա) $127,(023)$;
բ) $0,1(27)$;
գ) $-1,34(8)$;
դ) $-0,56789101112...$:

339. Տրված թվերը կլորացնելով 0,1 ճշգրտությամբ՝ գտեք նրանց մոտավոր գումարը.
ա) $3,288 + 0,123$;
բ) $-1,236 + 2,555$;
գ) $0,100100010... + 0,238$;
դ) $2,7(3) + 3,(42)$:

340. Տված թվերը կլորացնելով 0,1 ճշգրտությամբ՝ գտեք նրանց մոտավոր տարբերությունը.

ա) 1,4545 – 1,238;
բ) 2,1641 – 3,1145;
գ) 7 – 0,(3);
դ) 1,(45) – 1,2;
ե) 2,1264 – 3,(1);
զ) 5,(7) – 2,(56):

341. Կատարեք 339 և 340 համարների առաջադրանքները՝ կլորացնելով նրանցում տրված թվերը մինչև 0,001 ճշգրտությամբ:

342. Կլորացնելով տրված թվերը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանը՝ հաշվեք նրանց մոտավոր արտադրյալը.

ա) 2,35 · 3,251;
բ) –4,3205 · 2,503;
գ) 3 · 2,(1);
դ) 0,56 · 0,(3);
ե) 0,(1) · 0,(2);
զ) 12,(45) · 10,(1):

343. Կլորացնելով տրված թվերը մինչև երկրորդ նշանակալից թվանշանը՝ հաշվեք նրանց մոտավոր քանորդը.

ա) 3,57 : 0,259;
բ) –3,28 : 40,12;
գ) 12 : 0,(1);
դ) 0,(2) : 2;
ե) 4,(2) : 1,(3);
զ) 45,6(12) : 10,(2):

❖ **344.** Կատարեք 342 և 343 համարների առաջադրանքները՝ կլորացնելով նրանցում տրված թվերը մինչև երրորդ նշանակալից թվանշանը:

345. Տրված են a = 5,(1) և b = 2,123456... թվերը: $a + b$ թիվը գտնվում է 5 + 2 = 7 և 6 + 3 = 9 ամբողջ թվերի միջև՝ $7 < a + b < 9$: Այստեղ 5-ը և 2-ը a և b թվերի 1 ճշգրտությամբ մոտարկումներն են ներքևից, իսկ 6-ը և 3-ը՝ a և b թվերի 1 ճշգրտությամբ մոտարկումները՝ վերևից:
$a + b$ գումարի համար ստացեք ավելի ճշգրիտ գնահատականներ՝ կլորացնելով a և b թվերը.

ա) 0,1 ճշգրտությամբ,
բ) 0,01 ճշգրտությամբ,
գ) 0,001 ճշգրտությամբ:

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$$kx + b > 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

4.1 Թվային անհավասարությունների հատկությունները

Իրական թվերը ենթարկվում են հետևյալ կանոններին՝

Կանոն 1. ***Յանկացած երկու՝*** a ***և*** b ***իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ առնչություններից միայն մեկը.***

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b:$$

Օրինակ, 6 և 10 թվերի համար ճիշտ է $6 < 10$ անհավասարությունը (և միայն դա): Նկատենք, որ եթե $a > b$, ապա $b < a$:

Միևնույն նշանի անհավասարություններն անվանում են ***նույնանուն*** (կամ ***նույնիմաստ***): Օրինակ, $-2 < 5$ և $3 < 11$ նույնանուն են, $-5 > -10$ և $10 > -3$-ը նույնպես նույնանուն են:

Տարբեր նշանի անհավասարություններն անվանում են ***տարանուն*** (կամ ***հակիմաստ***): Օրինակ՝ $4 > 3$ և $2 < 5$ անհավասարությունները տարանուն են:

Կանոն 2. ***Յանկացած երկու*** a ***և*** b ***իրական թվերի համար, որոնք բավարարում են*** $a < b$ ***պայմանին, գոյություն ունի այնպիսի*** c ***իրական թիվ, որ*** $a < c$ ***և*** $c < b$ ***կամ որ նույնն է՝*** $a < c < b$:

Օրինակ, 1,2 և 1,3 թվերի համար կարելի է ընտրել, օրինակ, 1,22 թիվը, այնպես, որ

$$1{,}2 < 1{,}22 < 1{,}3:$$

Կանոն 3. ***Ցանկացած*** a, b ***և*** c ***իրական թվերի համար*** $a < b$ ***և*** $b < c$ ***անհավասարություններից հետևում է*** $a < c$ ***անհավասարությունը:*** *(Այս հատկությունը կոչվում է անհավասարությունների* ***փոխանցելիության (տրանզիտիվության)*** *հատկություն):*

Օրինակ՝ $\frac{8}{9} < 1$ և $1 < \frac{4}{3}$ անհավասարություններից հետևում է, որ $\frac{8}{9} < \frac{4}{3}$:

Կանոն 4. ***Ցանկացած*** a, b ***և*** c ***իրական թվերի համար*** $a < b$ ***անհավասարությունից հետևում է*** $a + c < b + c$ ***անհավասարությունը:***

Այս հատկությունը նշանակում է, որ անհավասարության նշանը չի փոխվի, եթե անհավասարության աջ և ձախ մասերին գումարենք միևնույն թիվը:

Օրինակ, $6 < 11$ ստույգ (ճշմարիտ) անհավասարության երկու մասերին գումարելով -4, կստանանք ճշմարիտ անհավասարություն՝

$$6 - 4 < 11 - 4,$$

$$2 < 7:$$

Կանոն 5. ***Ցանկացած*** a ***և*** b ***իրական թվերի և ցանկացած*** c ***դրական թվի համար*** $a < b$ ***անհավասարությունից հետևում է*** $ac < bc$ ***անհավասարությունը:***

Այս հատկությունը նշանակում է, որ անհավասարության նշանը չի փոխվի, եթե անհավասարության ձախ և աջ մասերը բազմապատկենք միևնույն դրական թվով:

Օրինակ, $-6 < 2$ ճշմարիտ անհավասարության ձախ և աջ մասերը բազմապատկելով 3-ով, կստանանք $-18 < 6$ ճշմարիտ անհավասարությունը:

Վերը թվարկած հինգ կանոններից բխում են անհավասարությունների հետևյալ ***հատկությունները.***

Հատկություն 1. ***Եթե*** a, b, c ***և*** d ***թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$ ***և*** $c < d$, ***ապա***

$$a + c < b + d:$$

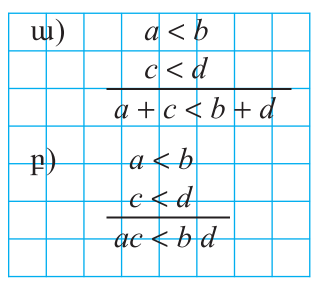
Դա նշանակում է, որ նույնիմաստ ճշմարիտ անհավասարությունները կարելի է անդամ առ անդամ գումարել (նկ. 15 ա)

Իրոք, 4-րդ կանոնի համաձայն՝

$$a + c < b + c, \qquad b + c < b + d:$$

Այժմ կիրառելով 3-րդ կանոնը, ստանում ենք՝

$$a + c < b + d:$$



Նկ. 15

⌈**Հատկություն 2.** ***Եթե*** $a > b$, ***ապա*** $a - b > 0$ ***և հակառակը՝ եթե*** $a - b > 0$, ***ապա*** $a > b$:

Իրոք, եթե $a > b$ անհավասարության երկու մասերին գումարենք միևնույն $(-b)$ թիվը, կստանանք $a + (-b) > b + (-b)$, կամ որ նույնն է՝ $a - b > 0$:

Եվ հակառակը, եթե $a - b > 0$ անհավասարության ձախ և աջ մասերին գումարենք b թիվը, կստանանք՝ $a - b + b > 0 + b$ կամ $a > b$:⌋

Հատկություն 3. ***Եթե*** a, b, c ***և*** d ***դրական թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$ և $c < d$, ***ապա*** $ac < bd$:

Դա նշանակում է, որ ճշմարիտ նույնանուն անհավասարությունները, որոնց ձախ և աջ մասերը դրական թվեր են, կարելի է անդամ առ անդամ բազմապատկել:

Իրոք. a, b, c և d դրական թվերի համար 5-րդ կանոնի հիման վրա $a < b$ պայմանից ստանում ենք $ac < bc$, իսկ $c < d$ պայմանից ստանում ենք $bc < bd$: Այժմ, 3-րդ կանոնի հիման վրա, ստանում ենք $ac < bd$:

Հատկություն 4. ***Եթե*** a ***և*** b ***դրական թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$, ***ապա*** $a^2 < b^2$:

Այս հատկությունը բխում է հատկություն 3-ից՝ $c = a$ և $d = b$ պայմանի դեպքում:

Շարունակելով նույն կերպ՝ հաջորդ բնական ցուցիչով աստիճանների համար նույնպես կստանանք ճիշտ արտահայտություններ.

$$a^3 < b^3, \quad a^4 < b^4, \quad a^5 < b^5, \quad ...., \quad a^n < b^n, \quad n \in \mathrm{N}:$$

(Այս փաստի խիստ հիմնավորված ապացուցումը կատարվում է, այսպես կոչված, ***մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի*** օգնությամբ, որին դուք կծանոթանաք հետագայում):

Հատկություն 5. ***Եթե*** a ***և*** b ***թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$, ***ապա*** $-a > -b$:

Իսկապես, $a < b$ անհավասարության ձախ և աջ մասերին գումարելով $(-b - a)$ թիվը՝ 4-րդ կանոնի հիման վրա կստանանք՝

$$a + (-b - a) < b + (-b - a),$$

որտեղից էլ հետևում է, որ $-a > -b$:

Հատկություն 6. ***Եթե*** c***-ն բացասական թիվ է, իսկ*** a***-ն և*** b***-ն այնպիսի թվեր են, որ*** $a < b$, ***ապա*** $ac > bc$:

Դա նշանակում է, որ ճշմարիտ անհավասարության նշանը կփոխվի հակադիրով, եթե նրա երկու մասը բազմապատկենք միևնույն բացասական թվով:

Իրոք. նախ $a < b$ անհավասարությունից հետևում է, որ $-a > -b$:

Բազմապատկելով այս անհավասարության երկու մասերը $-c$ դրական թվով՝ կստանանք՝

$$(-a) \cdot (-c) > (-b) \cdot (-c),$$

որտեղից էլ՝ $ac > bc$:

Հատկություն 7. ***Եթե*** a ***և*** b ***դրական թվերն այնպիսին են, որ*** $a < b$, ***ապա***

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}:$$

Իսկապես, համաձայն 5-րդ կանոնի՝ $a < b$ անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով $\frac{1}{ab}$ դրական թվով, կստանանք՝ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ կամ, որ նույնն է՝ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ անհավասարությունը:

Մինչ այս գործածվում էին հավասարության (=) և խիստ անհավասարության (< կամ >) նշանները: Երբեմն անհրաժեշտ է լինում գործածել, այսպես կոչված, ***ոչ խիստ անհավասարություններ:***

Օրինակ 1. Այս ձմեռ ջերմաստիճանը Մոսկվայում $-30°$C-ից ներքև չի իջել: Եթե ջերմաստիճանը նշանակենք t տառով, ապա ձմռան ցանկացած օր կամ $t > -30°$C, կամ $t = -30°$C, որը գրառվում է այսպես՝

$$t \geqslant -30°\text{C}:$$

Բերենք $a \leqslant b$ և $a \geqslant b$ ոչ խիստ անհավասարությունների սահմանումները:

$a \leqslant b$ գրառումը նշանակում է կամ $a < b$, կամ $a = b$:

$a \leqslant b$ գրառումը կարդում են այսպես՝ «a-ն մեծ չէ b-ից» կամ «a-ն փոքր կամ հավասար է b-ին»:

$a \geqslant b$ գրառումը նշանակում է կամ $a > b$ կամ $a = b$:

$a \geqslant b$ գրառումը կարդում են այսպես՝ «a-ն փոքր չէ b-ից» կամ «a-ն մեծ կամ հավասար է b-ին»:

$a \leqslant b$ և $c \geqslant d$ գրառումներն անվանում են ***ոչ խիստ անհավասարություններ:***

Օրինակ 2. $5 \leqslant 6$ և $4 \geqslant 2^2$ անհավասարությունները ճշմարիտ են, իսկ $9 \leqslant 7$ և $3 \geqslant 4$ անհավասարությունները սխալ են:

Ոչ խիստ անհավասարությունների համար վերը բերված 3-5 կանոնները և 3-7 հատկությունները մնում են ուժի մեջ, եթե նրանցում խիստ անհավասարության նշանը փոխարինվի ոչ խիստ անհավասարության նշանով: Ձևակերպենք այդ հատկություններից մեկը:

Հատկություն 4.* Եթե a և b դրական թվերն այնպիսին են, որ $a \leqslant b$, ապա $a^2 \leqslant b^2$:

Մենք արդեն նշել ենք, որ եթե $a < b$ և $b < c$, ապա գրառում են այսպես՝ $a < b < c$: Նույն կերպ, եթե $a \leqslant b$ և $b < c$, ապա գրառում են՝ $a \leqslant b < c$, եթե $a < b$ և $b \leqslant c$, ապա գրառում են՝ $a < b \leqslant c$, եթե $a \leqslant b$ և $b \leqslant c$, ապա գրառում են $a \leqslant b \leqslant c$:

$a < b < c$, $a \leqslant b < c$, $a < b \leqslant c$, $a \leqslant b \leqslant c$ անհավասարություններն անվանում են ***կրկնակի անհավասարություններ:***

Օգտագործելով անհավասարությունների հիմնական հատկությունները՝ լուծենք հետևյալ խնդիրները:

Խնդիր 1. Ապացուցեք, որ եթե ցանկացած a և b ոչ բացասական իրական թվերի և n բնական թվի համար

$$a^n > b^n, \text{ ապա } a > b:$$

Ապացուցում: Պայմանից հետևում է, որ $a \neq 0$: Երբ $b = 0$, կստանանք $a^n > 0$, հետևաբար $a > 0$, այսինքն՝ $a > b$:

Դիցուք՝ $b > 0$:

Համաձայն թվերի համեմատության հիմնական սկզբունքի, ցանկացած a և b իրական թվերի համար հնարավոր է երեք դեպք՝

$$\text{կամ } a < b, \text{ կամ } a = b, \text{ կամ } a > b:$$

Դիցուք՝ $a < b$, այսինքն՝ $b > a$: Ըստ նախորդ հատկության՝ $b^n > a^n$, որը հակասում է տրված $a^n > b^n$ պայմանին:

$a = b$ դեպքում $a^n = b^n$, որը նույնպես հակասում է $a^n > b^n$ պայմանին: Ուստի մնում է $a > b$ դեպքը: Պնդումն ապացուցված է:

Խնդիր 2. Ապացուցեք, որ կամայական a և b դրական թվերի և n բացասական ամբողջ թվի համար՝ եթե $a > b$, ապա $a^n < b^n$:

Ապացուցում: Քանի որ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $-n$-ը կլինի բնական թիվ, և համաձայն 4-րդ հատկության, $a > b$ պայմանից կհետևի $a^{-n} > b^{-n}$ անհավասարությունը, կամ որ նույնն է՝

$$\frac{1}{a^n} > \frac{1}{b^n}: \qquad (1)$$

Ըստ բնական ցուցիչով աստիճանի սահմանման, a^{-n} և b^{-n} թվերը դրական են որպես $-n$ հատ դրական թվերի արտադրյալներ, ուստի դրական են նաև a^n և b^n թվերը, որովհետև

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad b^n = \frac{1}{b^{-n}}:$$

Հետևաբար (1) անհավասարության երկու մասերը բազմապատկելով $a^n \cdot b^n$ դրական թվով՝ կստանանք

$$\frac{1}{a^n} a^n \cdot b^n > \frac{1}{b^n} a^n \cdot b^n, \text{ այսինքն՝ } b^n > a^n$$

ճիշտ անհավասարությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 3. Ապացուցեք, որ եթե ցանկացած a և b դրական թվերի և n բացասական ամբողջ թվի համար

$$a^n > b^n, \text{ ապա } a < b:$$

Ապացուցում: Նախորդ խնդիրը լուծելիս ցույց տվեցինք, որ եթե $a > 0$ և $b > 0$ ապա $a^n > 0$ և $b^n > 0$: Ուստի $a^n > b^n$ անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով $\frac{1}{a^n \cdot b^n}$ դրական թվով, ստանում ենք

$$\frac{1}{b^n} > \frac{1}{a^n}$$

ճշմարիտ անհավասարությունը, որը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$b^{-n} > a^{-n}:$$

Սակայն, քանի որ n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $-n$-ը բնական թիվ է, ուստի, համաձայն խնդիր 1-ի, վերջին անհավասարությունից հետևում է, որ $b > a$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:⌋

Առաջադրանքներ

❖ **346.** Ինչպիսի՞ անհավասարություններ կարելի է.

ա) գումարել, բ) բազմապատկել:

⊙ **347.** Ո՞ր դեպքում է $a \geqslant b$ անհավասարությունը.

ա) ճշմարիտ, բ) սխալ:

⊙ **348.** Համեմատեք թվերը.

ա) 5 և 9; բ) –5 և –9; գ) 2,5 · 4 և 10;
դ) 1,2 և 1,202; ե) –6,7 և 1; զ) –5,404 և –5,4:

349. Նշեք նշված թվերից մեկից մեծ և մյուսից փոքր թիվ: Պատասխանը գրեք կրկնակի անհավասարության տեսքով.

ա) 3 և 5; բ) –25 և –29; գ) 2,5 և 2,6;

դ) 2,4 և 2,404; ե) –3,71 և –3,72; զ) –0,501 և 0,6:

350. Տրված ճշմարիտ անհավասարությունների հիման վրա կատարեք եզրակացություն: *Օրինակ՝ 3 < 15 և 15 < 20, նշանակում է՝ 3 < 20:*

ա) $-5 < 0$ և $0 < 2$; բ) $-2 < 0$ և $0 < 2$;

գ) $2 > 1$ և $1 > 0$; դ) $2,(1) > 2$ և $2 > 1,(6)$;

ե) $-3,7 > -4$ և $-4 > -7$; զ) $0,(5) < 0,(6)$ և $0,(6) < 0,(67)$;

է) $\frac{5}{6} < 1$ և $1 < \frac{9}{8}$; ը) $\frac{7}{16} < \frac{1}{2}$ և $\frac{1}{2} < \frac{8}{16}$:

351. Դիցուք՝ $x < 4$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ.

ա) $x^{-2} < 9$; բ) $x^{-2} < 16$; գ) $x^{-2} < 64$:

352. Դիցուք՝ $x > 4$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ.

ա) $x^{-2} > 9$, բ) $x^{-2} > 16$, գ) $x^{-2} > 64$:

353. Դիցուք՝ $x^{-2} < 3^{-2}$: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ $x < 3$:

354. Դիցուք՝ $1,1^n < 1,1^{-4}$ (n-ը ամբողջ թիվ է): Կարո՞ղ ենք պնդել, որ $n < -4$:

355. Տրված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք նոր ճշմարիտ անհավասարություն՝ գումարելով նրա երկու մասերին միևնույն թիվը.

ա) $15 < 20$; բ) $5 > 4$; գ) $2,5 < 3$;

դ) $1,1 < 1,2$; ե) $1,3 \geqslant 1,2$; զ) $5 \leqslant 6$:

356. Տրված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք նոր ճշմարիտ անհավասարություն՝ նրա երկու մասերը բազմապատկելով միևնույն դրական թվով.

ա) $15 < 20$; բ) $5 > 4$; գ) $-2,5 < 3$;

դ) $1,1 < 1,2$; ե) $1,3 \geqslant 1,2$; զ) $-5 \leqslant 6$:

357. Գումարեք տրված ճշմարիտ թվային անհավասարությունները.

ա) $14 > 11$ և $10 > 9$; բ) $-2 > -3$ և $3 > 2$;

գ) $-6 < -5$ և $2 < 3$; դ) $-8 \leqslant 0$ և $8 \leqslant 9$:

358. Բազմապատկեք տրված ճշմարիտ թվային անհավասարությունները.

ա) $14 > 10$ և $2 > 1$; բ) $5 > 3$ և $6 > 5$;

գ) $6 < 7$ և $2 < 3$; դ) $8 < 9$ և $1 < 2$:

359. Տրված ճշմարիտ անհավասարությունից ստացեք ճշմարիտ անհավասարություն, որում յուրաքանչյուր թիվ փոխարինված է իր հակադիրով: (*Օրինակ՝ քանի որ $19 > 13$, ապա $-19 < -13$).*

ա) $3 > 0$; բ) $5 > -1$; գ) $-9 < -1$;

դ) $-5 \leqslant -1$; ե) $9 \geqslant -2$; զ) $0 \leqslant 3$:

360. Բազմապատկեք ճշմարիտ անհավասարության երկու մասերը միևնույն բացասական թվով.

ա) $1 < 2$; բ) $5 > 4{,}5$; գ) $6{,}5 \leqslant 6{,}9$;

դ) $1{,}1 < 1{,}2$; ե) $1{,}3 \geqslant 1{,}2$; զ) $5 \leqslant 6$:

Ճի՞շտ է արդյոք ստացված անհավասարությունը:

361. Գրեք անհավասարություն, որն ստացվում է տված անհավասարության ձախ և աջ մասերի թվերը փոխարինելով նրանց հակադարձներով:

(Օրինակ, քանի որ $5 < 6$, ապա $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$).

ա) Քանի որ $2 < 4$, ապա ...; բ) Քանի որ $11 < 12$, ապա ...;

գ) Քանի որ $13 \geqslant 12$, ապա ...; դ) Քանի որ $15 \leqslant 26$, ապա ...;

362. Համեմատեք թվերը.

ա) 2^2 և 9^2; բ) 5^2 և 6^2;

գ) 4^2 և 10^2; դ) $1{,}3^2$ և $1{,}5^2$;

ե) $7{,}28^2$ և $8{,}37^2$; զ) $5{,}4^2$ և $4{,}5^2$;

է) $(-2)^2$ և $(-3)^2$; ը) 4^2 և $(-4)^2$;

թ) $(-4)^2$ և 1^2; ժ) $(-1)^2$ և $(-1{,}4)^2$;

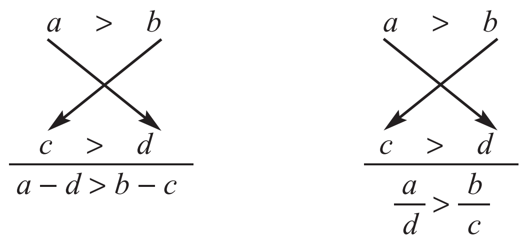
ի) $(-4{,}9)^2$ և $(-7)^2$; լ) 4^2 և $(-5)^2$:

363. Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը.

ա) $6{,}7272 \leqslant 6{,}(72) < 6{,}7273$;

բ) $-0{,}3131 < -0{,}(3) \leqslant -0{,}3132$:

❖ **364.** Ապացուցեք, որ.
ա) եթե $a > b$ և $c > d$, ապա $a - d > b - c$ (նկ. 16 ա)
բ) եթե $a < b$ և $c < d$, ապա $a - d < b - c$:



ա) բ)

Նկ. 16

❖ **365.** Դրական a, b, c և d թվերի համար ապացուցեք, որ.

ա) եթե $a > b$ և $c > d$, ապա $\dfrac{a}{d} > \dfrac{b}{c}$ (նկ. 16 բ)

բ) եթե $a < b$ և $c < d$, ապա $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$:

366. Ապացուցեք, որ եթե $a < b < 0$, ապա $a^2 > b^2$:

367. Գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի a և b թվեր, որոնց համար.
ա) $a < \dfrac{71}{100}$, $b > 0{,}7$ և $a > b$, բ) $a > -2$, $b < -2{,}07$ և $a = b$:

368. Ապացուցեք, որ եթե $0 < a < 1$ և n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $a^n > 1$:

369. Ապացուցեք, որ եթե $a > 1$ և n-ը բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $a^n < 1$:

370. Ապացուցեք, որ եթե $0 < a < 1$, իսկ m-ը և n-ը բացասական ամբողջ թվեր են, ընդ որում $m > n$, ապա $a^m < a^n$:

4.2. Միջակայքերի պատկերումը թվային ուղղի վրա

Դիցուք՝ տված են կոորդինատային x առանցքը և $a < b$ պայմանին բավարարող երկու իրական թվեր: a և b թվերը կարելի է դիտարկել որպես x առանցքի երկու տարբեր կետերի կոորդինատներ, որը մենք պայմանավորվեցինք անվանել նաև a և b կետեր (նկ. 17):

x առանցքի a և b կետերից և նրանց միջև գտնվող բոլոր կետերից բաղկացած բազմությունը անվանում են ***a*-ից *b* հատված** և նշանակում՝ $[a; b]$:

Այսպիսով, $[a; b]$ ***հատվածը բոլոր այն x իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a \leqslant x \leqslant b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

a և b կետերն անվանում են [a; b] հատվածի ***ծայրակետեր:*** [a; b] հատվածի ծայրակետերը պատկանում են այդ հատվածին:

Եթե $[a; b]$ հատվածից հեռացնենք նրա երկու ծայրակետերը, ապա մնացած բոլոր կետերի բազմությունը նշանակում են $(a; b)$-ով և անվանում՝ a-ից b ***բաց միջակայք:***

Այսպիսով, $(a; b)$ ***բաց միջակայքը բոլոր այն x իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a < x < b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

Եթե $[a; b]$ հատվածից հեռացնենք միայն b կետը, ապա մնացած բոլոր կետերի բազմությունը նշանակում են $[a; b)$-ով և անվանում a-ից b ***կիսաբաց միջակայք*** կամ ***աջից բաց միջակայք:***

Այսպիսով, $[a; b)$ ***կիսաբաց միջակայքը բոլոր այն իրական թվերի բազմությունն է, որոնք բավարարում են***

$$a \leqslant x < b$$

կրկնակի անհավասարությանը:

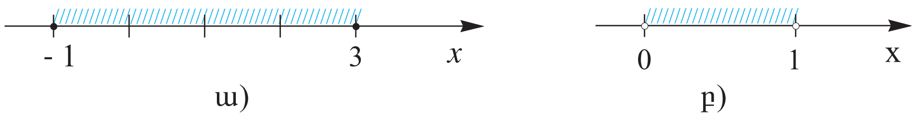
Բոլոր այն իրական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են

$$a < x \leqslant b$$

կրկնակի անհավասարությանը, կոչվում է ձախից բաց միջակայք կամ կիսաբաց միջակայք:

Օրինակ 1. $[-1; 3]$ հատվածը $-1 \leqslant x \leqslant 3$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 18 ա):

Օրինակ 2. $(0; 1)$ բաց միջակայքը $0 < x < 1$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 18 բ):

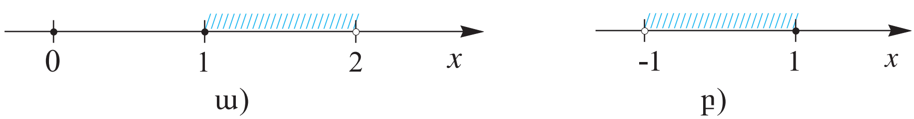


Նկ. 18

Դիտողություն. Դիտարկվող միջակայքին պատկանող ծայրակետերը թվային ուղղի վրա նշվում են սև (մուգ) կետերով, իսկ չպատկանող ծայրակետերը՝ շրջանակներով:

Օրինակ 3. [1; 2) կիսաբաց միջակայքը $1 \leqslant x < 2$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 19 ա):

Օրինակ 4. (−1; 1] կիսաբաց միջակայքը $-1 < x \leqslant 1$ կրկնակի անհավասարությանը բավարարող բոլոր իրական թվերի բազմությունն է (նկ. 19 բ).



Նկ. 19

Եթե x կետը Ox առանցքի դրական ուղղությամբ շարժվում է այնպես, որ նրա կոորդինատը ընդունում է ցանկացած արժեք, ապա ասում են, որ այդ կետը ձգտում է պլյուս անվերջության և նշանակում են՝ $x \to +\infty$:

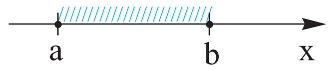
Նույն կերպ, եթե x կետը շարժվում է Ox առանցքի բացասական ուղղությամբ այնպես, որ նրա x կոորդինատի համար $|x|$-ը կարող է լինել որքան ուզեք մեծ թիվ, ապա ասում են, որ այդ կետը ձգտում է մինուս անվերջության և նշանակում՝ $x \to -\infty$:

Այժմ ընդլայնենք «միջակայք»հասկացությունը: Դիցուք՝ a-ն որոշակի թիվ է:

Բոլոր այն x ***իրական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են*** $x > a$ ***անհավասարությանը, կամ*** x***-երի առանցքի բոլոր այն կետերը, որոնք ունեն*** $x > a$ ***կոորդինատներ, կոչվում է բաց ճառագայթ*** a-ից $+\infty$ ***և գրառվում է՝*** $(a; +\infty)$:

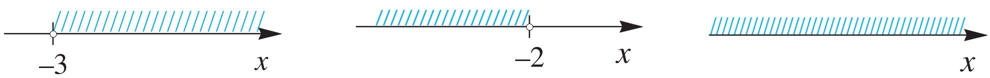
Բոլոր այն x ***իրական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են*** $x < a$ ***անհավասարությանը (կամ*** x ***առանցքի բոլոր այն կետերը, որոնք ունեն*** $x < a$ ***կոորդինատը) կոչվում է թվային բաց ճառագայթ և գրառվում է՝*** $(-\infty; a)$: Կարդում են՝ մինուս անվերջից a:

Վերջապես, բոլոր իրական թվերի բազմությունը (կամ x-երի առանցքի բոլոր կետերի բազմությունը) նշանակում են $(-\infty; +\infty)$*:* Կարդում են՝ մինուս անվերջից պլյուս անվերջ



Նկ. 17

Օրինակ՝ 20 ա) նկարում պատկերված է $(-3; +\infty)$ միջակայքը, 20 բ) նկարում՝ $(-\infty; -2)$ միջակայքը, 20 գ) նկարում՝ $(-\infty; +\infty)$ միջակայքը:



ա) բ) գ)

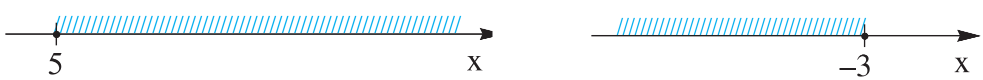
Նկ. 20

$[a; b]$ փակ միջակայքը (հատվածը) միշտ վերջավոր է: Հատվածը որոշվում է a և b տված թվերով (կամ x առանցքի երկու՝ a և b կետերով):

Բոլոր այն x ***իրական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են*** $x \geqslant a$ ***անհավասարությանը (կամ*** x ***առանցքի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք ունեն*** $x \geqslant a$ ***կոորդինատը), կոչվում է*** a ***սկիզբով ճառագայթ և կարդացվում է՝*** a***-ից պլյուս անվերջ:***

Բոլոր այն x ***իրական թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են*** $x \leqslant b$ ***անհավասարությանը (կամ*** x ***առանցքի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք ունեն*** $x \leqslant b$ ***կոորդինատը, կոչվում է թվային ճառագայթ և կարդացվում է մինուս անվերջից*** b*:*

Օրինակ՝ 21 ա) նկարում պատկերված է $[5; +\infty)$ ճառագայթը, իսկ 21 բ) նկարում՝ $(-\infty; -3]$ ճառագայթը:



ա) բ)

Նկ. 21

Հաճախ բոլոր տիպի միջակայքերի համար (փակ, բաց, կիսաբաց ճառագայթ) օգտագործում են ընդհանուր անվանում՝ ***թվային միջակայքեր:***

Բացի վերոնշյալ միջակայքերից դիտարկում են նաև ուրիշ թվային բազմություններ, դրանք հաճախ նշանակում են A, B, C,... տառերով: Որոշ բազմություններ ունեն հատուկ նշանակումներ: Օրինակ՝ N-ը բնական թվերի բազմությունն է, Z-ը՝ ամբողջ թվերի բազմությունը, Q-ն՝ ռացիոնալ թվերի բազմությունը, R-ը բոլոր իրական թվերի բազմությունը, R_+-ը բոլոր դրական իրական թվերի բազմությունը:

Այն փաստը, որ թիվը պատկանում է կամ չի պատկանում թվային բազմության, գրառում են հատուկ նշանների միջոցով՝ $\in$ (պատկանում է) և $\notin$ (չի պատկանում):

Օրինակ՝ $-5 \in Z$ (-5-ը պատկանում է ամբողջ թվերի բազմությանը),

$-5 \notin N$ (-5-ը չի պատկանում բնական թվերի բազմությանը):

Առաջադրանքներ

❖ **371.** ա) Ո՞ր թվերի բազմություններն են անվանում փակ միջակայք (հատված), բաց միջակայք, կիսաբաց միջակայք:
բ) Ի՞նչ են նշանակում $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ գրառումները:

⊙ **372.** Անվանեք թվային բազմությանը պատկանող բոլոր ամբողջ թվերը.

ա) $[-3; 1]$ բ) $(-3; 1)$; գ) $[-3; 1)$; դ) $(-3; 1]$;
ե) $[-2; 3]$ զ) $(-2; 3)$; է) $[-2; 3)$; ը) $(-2; 3]$:

Ինչպե՞ս են անվանում այդ բազմություններից յուրաքանչյուրը:

⊙ **373.** Անվանեք թվային բազմությանը պատկանող երեք ամբողջ թվեր.

ա) $[0; +\infty)$; բ) $(0; +\infty)$; գ) $(-\infty; 1)$; դ) $(-\infty; 1]$;

⊙ **374.** Ասեք թվային բազմության անվանումը և պատկերեք այն կոորդինատային ուղղի վրա.

ա) $[3; 5]$; բ) $(3; 5)$; գ) $[3; 5)$; դ) $(3; 5]$;
ե) $[-2; +\infty)$; զ) $(-2; +\infty)$; է) $(-\infty; -2)$; ը) $(-\infty; -2]$:

⊙ **375.** Գրառեք նշանակումը.

ա) 2-ից 4 փակ միջակայքի (հատվածի),
բ) 2-ից 4 բաց միջակայքի,
գ) 2-ից 4 կիսաբաց միջակայքի՝ 4-ը ներառած,
դ) 2-ից 4 կիսաբաց միջակայքի՝ 2-ը ներառած,
ե) 5-ից $+\infty$ ճառագայթի,
զ) 5-ից $+\infty$ բաց ճառագայթի,
է) $-\infty$-ից 0 ճառագայթի,
ը) $-\infty$-ից 0 բաց ճառագայթի :

Պատկերեք նշված բազմությունները թվային ուղղի վրա:

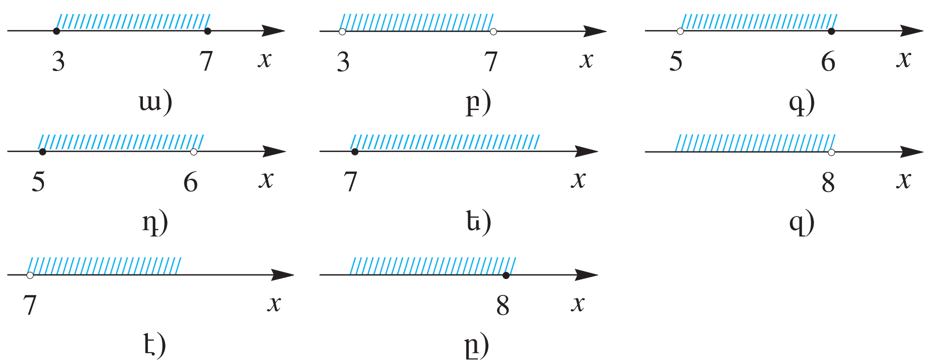
376. Պատկանո՞ւմ է արդյոք -2 թիվը տրված թվային բազմությանը (գրառումը կատարեք $\in$ և $\notin$ նշանների օգնությամբ):

ա) $[-3; 0]$; բ) $(-2; 3)$; գ) $(-\infty; -2]$; դ) $(-3; +\infty]$;
ե) N; զ) Z; է) Q; ը) R:

377. Պատկանո՞ւմ է արդյոք $\frac{2}{3}$ թիվը տրված թվային բազմությանը (գրառումը կատարեք $\in$ և $\notin$ նշանների օգնությամբ):

ա) $(0; 1]$; բ) $[1; 2]$; գ) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; դ) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$;
ե) N; զ) Z; է) Q; ը) R:

378. Գրառեք նկ. 22-ում պատկերված բազմությունները.

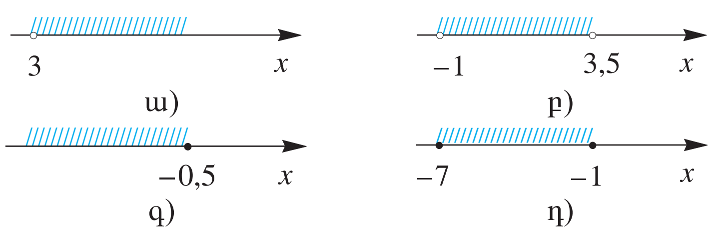


Նկ. 22

379. Նկ. 22-ում պատկերված թվային բազմություններից որո՞նց են համապատասխանում անհավասարությունները.

ա) $x \geqslant 7$; բ) $x > 7$; գ) $x \leqslant 8$;
դ) $x < 8$; ե) $3 < x < 7$; զ) $3 \leqslant x \leqslant 7$;
է) $5 \leqslant x < 6$; ը) $5 < x \leqslant 6$:

380. Նկ. 23-ում պատկերված թվային բազմությունները գրառեք անհավասարությունների նշանների օգնությամբ.



Նկ. 23

381. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք այն թվերը, որոնք՝

ա) 3-ից փոքր են, բ) -5-ից մեծ են,

գ) 2-ից մեծ չեն, դ) 0-ից փոքր չեն,

ե) 7-ից մեծ են, բայց 10-ից փոքր, զ) -5-ից մեծ են, բայց -1-ից փոքր:

Ստացված թվային բազմությունները գրառեք անհավասարություններ տեսքով:

382. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք.

ա) $[2; 5]$ հատվածը, բ) $(-2; 0)$ միջակայքը:

Գրառեք այն կրկնակի անհավասարության տեսքով:

383. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք թվային միջակայքերը.

ա) $[-2; 3]$ և $[0; 2]$ բ) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ և $[-2; 0{,}3]$;

գ) $(-4; 0{,}29)$ և $\left(\frac{2}{7}; 5\right)$; դ) $\left(-0{,}44; \frac{13}{40}\right)$ և $\left(-\frac{3}{7}; -\frac{1}{4}\right)$:

Նրանք ունե՞ն ընդհանուր կետեր: Եթե այո, գրառեք այդ բազմությունների ընդհանուր մասը (հատումը):

4.3. Առաջին աստիճանի մեկ անհայտով անհավասարումներ

$$kx + b > 0 \quad (1)$$

կամ

$$kx + b < 0 \quad (2)$$

տեսքի անհավասարումները, որտեղ k***-ն և*** b***-ն տված թվեր են, ընդ որում*** $k \neq 0$, ***անվանում են առաջին աստիճանի մեկ՝*** x ***անհայտով անհավասարումներ:***

k թիվն անվանում են անհավասարման անհայտի ***գործակից,*** իսկ b-ն՝ ***ազատ անդամ:***

Մեկ՝ x անհայտով ***անհավասարման լուծում*** անվանում են այնպիսի x_0 թիվ, որն անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելիս ստացվում է թվային ճիշտ անհավասարություն:

Լուծել անհավասարումը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

Այստեղ և հետագայում դիտարկվում են x փոփոխականով անհավասարումներ, չնայած որ x-ի փոխարեն կարելի է գրել ցանկացած տառ՝ t, v, y, ...:

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումը՝

$$2x + 5 < 0: \qquad (3)$$

Այն լուծելու համար կարելի է դատել այսպես.

Դիցուք՝ որևէ x_0 թիվ (3) անհավասարման լուծում է: Այն տեղադրելով x-ի փոխարեն (3) անհավասարման մեջ՝ կստանանք

$$2x_0 + 5 < 0 \qquad (4)$$

թվային ճիշտ անհավասարությունը:

Գումարելով այդ անհավասարության երկու մասերին -5 թիվը՝ կստանանք

$$2x_0 < -5 \qquad (5)$$

թվային ճիշտ անհավասարությունը: Բաժանելով այդ անհավասարության երկու մասը 2 դրական թվի վրա՝ կստանանք

$$x_0 < -\frac{5}{2} \qquad (6)$$

թվային ճիշտ անհավասարությունը:

Հակառակը. դիցուք՝ մի որևէ x_0 թիվ բավարարում է (6) անհավասարությունը: Բազմապատկելով այդ անհավասարությունը 2 դրական թվով՝ կստանանք (5) ճիշտ անհավասարությունը: Այնուհետև գումարելով (5) անհավասարության երկու մասերին 5 թիվը՝ կստանանք (4) ճիշտ թվային անհավասարությունը, այսինքն կստանանք, որ x_0-ն բավարարում է (3) անհավասարմանը:

Այսպիսով, (3) անհավասարության բոլոր լուծումների բազմությունը

$x < -\frac{5}{2}$ պայմանին բավարարող բոլոր թվերի բազմությունն է: Կարելի է նաև ասել, որ (3) անհավասարության բոլոր լուծումները կազմում են

$$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$$

միջակայքը կամ (3) անհավասարության բոլոր լուծումների բազմությունը

$$\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$$

միջակայքն է:

Պատ.՝ $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$:

Նման դատողություններ կարելի է անել նաև (1) և (2) տիպի ցանկացած առաջին աստիճանի անհավասարումների լուծման դեպքում:

Այդ դատողություններից բխում է մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարումների լուծման հետևյալ եղանակը. *անհավասարության ազատ անդամը տեղափոխել անհավասարության աջ մասը (փոխելով b-ի նշանը հակադիրով), ստացված անհավասարության երկու մասերը բաժանել անհայտի գործակցի վրա (ընդ որում, եթե $k > 0$, ապա անհավասարության նշանը չի փոխվում, իսկ եթե $k < 0$, ապա անհավասարության նշանը փոխվում է հակադիրով)։*

Ստացված անհավասարումը հենց պատասխանն է։

Օրինակ 2. Լուծենք անհավասարումը՝

$$-4x + 13 < 0։ \qquad (7)$$

Տեղափոխելով ազատ անդամը աջ մաս, ստանում ենք

$$-4x < -13$$

անհավասարումը։

Այս անհավասարման երկու մասերը բաժանելով –4 բացասական թվի վրա, ստանում ենք

$$x > \frac{13}{4}$$

անհավասարումը (ուշադրություն դարձրեք անհավասարման նշանի փոփոխության վրա)։ Այսպիսով, (7) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$ միջակայքն է։

Պատ.՝ $\left(\frac{13}{4}, +\infty\right)$։

Առաջադրանքներ

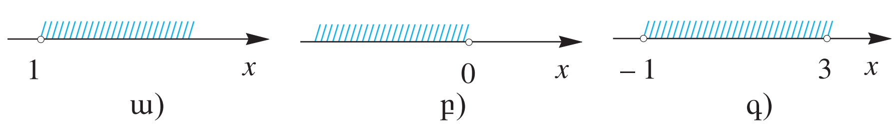
384. Կոորդինատային առանցքի վրա պատկերեք միջակայքը.

ա) $(-2; 7)$; բ) $(-17; 34)$; գ) $(1234; 1398)$;

դ) $(-\infty; 0)$; ե) $(0; +\infty)$; զ) $(-\infty; -3)$;

է) $(2; +\infty)$; ը) $(-\infty; +\infty)$; թ) $\left(-\frac{1}{3}; 0{,}5\right)$։

385. Նկար 24-ում պատկերված միջակայքերը գրեք անհավասարությունների նշանների օգնությամբ։



Նկ. 24

386. Կոորդինատների առանցքի վրա պատկերեք բոլոր այն թվերը, որոնք բավարարում են նշված անհավասարություններին.

ա) $x > 0$; բ) $x < 3$; գ) $x > 3579$;
դ) $x < -2$; ե) $x > -1748$; զ) $x < 0{,}00000006$;
է) $x > 5{,}(3)$; ը) $x < \pi$; թ) $0 < x < 1{,}41$;
ժ) $-2 < x < -0{,}5$; ի) $|x| < 1$; լ) $|x - 1| > 1$:

387. Ինչպիսի՞ նշան (=; ≠; <; >) պետք է դնել a և b թվերի միջև, եթե a - b տարբերությունը.

ա) դրական թիվ է, բ) բացասական թիվ է,
գ) բնական թիվ է, դ) հավասար չէ զրոյի,
ե) հավասար է զրոյի:

388. Ո՞ր թիվն է մեծ.

ա) a-ն, թե $a + 3$-ը, բ) $b + 1$-ը, թե $b + 2$-ը,
գ) $a - 5$-ը, թե $a + 2$-ը, դ) $b - 7$-ը, թե $b - 6$-ը;
(այստեղ a-ն և b-ն կարող են լինել ցանկացած թվեր):

⊙ **389.** Կարելի՞ է արդյոք նշել.

ա) $x > 0$ անհավասարման փոքրագույն լուծումը,
բ) $x < -2$ անհավասարման մեծագույն լուծումը,
գ) $x > -5$ անհավասարման փոքրագույն ամբողջ լուծումը,
դ) $x < 1$ անհավասարման մեծագույն ամբողջ լուծումը:

390. $x - a$ տարբերությունը համեմատեք զրոյի հետ, եթե.

ա) $x > a$; բ) $x < a$:

391. Գրեք մեկ անհայտով առաջին աստիճանի որևէ անհավասարում: Անվանեք այդ անհավասարման անհայտի գործակիցը և ազատ անդամը:

⊙ **392.** ա) Ի՞նչն են անվանում մեկ անհայտով անհավասարման լուծում:

բ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել մեկ անհայտով անհավասարումը:

⊙ **393.** 3 թիվը նշված անհավասարման լուծո՞ւմ է.

ա) $x > 0$; բ) $x > -2$; գ) $x < \pi$;
դ) $-3 < x < 3$; ե) $x < 3{,}1$; զ) $2{,}(8) < x < 3{,}1$:

Լուծեք անհավասարումը (394-408).

394. ա) $x-1>0$; բ) $x+5<0$; գ) $x-0{,}5<0$;
դ) $3+x>0$; ե) $7+x>0$; զ) $x-1\frac{1}{3}<0$:

395. ա) $x+4>7$; բ) $x-11<-7$; գ) $x+7>7$;
դ) $x-6<6$; ե) $4+x>2$; զ) $3+x<-6$:

396. ա) $x-2>0{,}2$; բ) $x-3{,}5<4$; գ) $2{,}1+x<7$;
դ) $x-2>-0{,}6$; ե) $x+10{,}7>7{,}9$; զ) $5{,}013+x<0{,}13$:

397. ա) $x-1783<-\frac{1}{3}$; բ) $x+\frac{1}{5}<199$; գ) $\frac{5}{7}+x>2\frac{1}{2}$;
դ) $x-2\frac{1}{2}<-1\frac{3}{5}$; ե) $x+\frac{37}{90}<\frac{11}{18}$; զ) $\frac{13}{48}+x>7\frac{15}{16}$:

398. ա) $x-3{,}6>2\frac{1}{3}$; բ) $7{,}4+x>7\frac{2}{5}$; գ) $x-12\frac{1}{4}<15{,}3$:

399. ա) $2x>4$; բ) $7x<-14$; գ) $-5x<100$;
դ) $-3x<9$; ե) $-2x>-2$; զ) $-3x>-6$:

400. ա) $3x<2$; բ) $-2x<11$; գ) $-4x>-2$;
դ) $-5x>1$; ե) $-17x>-2$; զ) $13x<3$:

401. ա) $2x>0$; բ) $-2x<0$; գ) $-x<2$;
դ) $-x<0$; ե) $-x>-2$; զ) $-x>1$:

402. ա) $\frac{1}{2}x<3$; բ) $\frac{3}{4}x<1$; գ) $-\frac{1}{3}x>-1$;
դ) $\frac{1}{5}x>0$; ե) $2x>\frac{2}{3}$; զ) $-4x<\frac{8}{11}$:

403. ա) $\frac{2}{3}x<\frac{5}{6}$; բ) $-\frac{4}{7}x>\frac{8}{7}$; գ) $-2x<1\frac{1}{3}$;
դ) $2\frac{1}{5}x>3$; ե) $1\frac{1}{2}x>-2\frac{1}{2}$; զ) $-3\frac{2}{7}x<-3\frac{1}{7}$:

404. ա) $0{,}2x>3$; բ) $3x>1{,}8$; գ) $-0{,}001x<1$:

405. ա) $0{,}2x > \frac{2}{5}$; բ) $1{,}5x < \frac{9}{10}$; գ) $-1{,}1x < 4\frac{2}{5}$;

դ) $\frac{x}{2} > 3$; ե) $\frac{x}{4} > \frac{7}{12}$; զ) $-\frac{2x}{3} < -8$:

406 ա) $2x - 4 > 0$; բ) $3x - 1 < 0$; գ) $-2x - 4 > 0$;

դ) $7x + 4 < 0$; ե) $4x + 3 > 0$; զ) $-4x + 3 < 0$:

407. ա) $1 + \frac{2}{9}x < 0$; բ) $\frac{4}{5} - 3x < 0$; գ) $1\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x > 0$;

դ) $4\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3}x > 0$; ե) $2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2} < 0$; զ) $\frac{5}{7}x - \frac{5}{7} > 0$:

408. ա) $0{,}003x - 20 < 0$; բ) $4x + 0{,}0001 > 0$; գ) $1{,}35 - 27x > 0$;

դ) $0{,}15 - 150x < 0$; ե) $-0{,}3x - 13 > 0$; զ) $-0{,}17x - 51 < 0$:

4.4. Մեկ անհայտով գծային անհավասարումներ

Անհավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը x փոփոխականի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ կամ թվեր են, անվանում են մեկ` x անհայտով գծային անհավասարումներ:

Հետևյալ անհավասարումները x փոփոխականով գծային անհավասարումների օրինակներ են.

$2x + 7 < x - 5,$ $0x - 3 < 0$

$7 < 2x + 9,$ $\frac{2}{3}x + 0{,}7 > 2\frac{1}{3}x + 5$

$2x + 7 > 2x + 5,$ $3x + 2 + x > x - 1 + x,$

$0x + 2 > 0,$ $3x + 2 < 0:$

Պարզ է, որ ցանկացած առաջին աստիճանի անհավասարում գծային անհավասարման մասնավոր դեպք է:

Գծային անհավասարման ձախ և աջ մասերում գտնվող բազմանդամների անդամներն անվանում են ***այդ անհավասարման անդամներ:***

x_0 թիվն անվանում են x ***անհայտով գծային անհավասարման լուծում,*** եթե նրանում x-ի փոխարեն x_0 տեղադրելիս ստացվում է թվային ճիշտ անհավասարություն:

x անհայտով երկու անհավասարումներ անվանում են ***համարժեք,*** եթե առաջին անհավասարման ցանկացած լուծում նաև երկրորդի լուծում է, և հակառակը՝ երկրորդի ցանկացած լուծում լուծում է նաև առաջինի համար:

Ցանկացած երկու անհավասարումներ, որոնք լուծում չունեն, համարվում են համարժեք: Անհավասարումները լուծելիս օգտվում են հետևյալ պնդումներից.

1) ***Անհավասարման անդամները կարելի է տեղափոխել նրա մի կողմից մյուսը՝ փոխելով տեղափոխվող անդամի նշանը հակադիրով:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման որևէ անդամ հակադիր նշանով տեղափոխենք նրա մի կողմից մյուս կողմը, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

Օրինակ, համարժեք են հետևյալ անհավասարումները՝

$2x - 7 < 0$ և $2x < 7$,

$3x + 5 > 2x - 9$ և $3x - 2x + 5 > -9$:

2) ***Անհավասարման մեջ կարելի է կատարել նման անդամների միացում:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման ձախ կամ աջ մասերում կատարվի նման անդամների միացում, ապա կստացվի սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում:

Օրինակ՝ համարժեք են հետևյալ անհավասարումները՝

$3x - 4\frac{1}{2} + 5x - \frac{1}{2} > 0$ և $8x - 5 > 0$,

$2x + 3 - 1 < x - 2x + 2$ և $2x + 2 < -x + 2$:

3) ***Անհավասարումը դրական թվով բազմապատկելիս (կամ բաժանելիս) նրա նշանը պահպանվում է:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման երկու մասը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն դրական թվով և պահպանենք անհավասարման նշանը, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում: Օրինակ՝ համարժեք են հետևյալ անհավասարումները՝

$\frac{1}{4}x > 2$ և $x > 8$,

$3x + 5 < 0$ և $x + \frac{5}{3} < 0$:

4) ***Անհավասարումը բացասական թվով բազմապատկելիս (կամ բաժանելիս) նրա նշանը փոխվում է հակադիրով:***

Այլ կերպ ասած, եթե անհավասարման երկու մասը բազմապատկենք (կամ բաժանենք) միևնույն բացասական թվով և փոխենք անհավասարման նշանը հակադիրով, ապա կստանանք սկզբնական անհավասարմանը համարժեք անհավասարում: Օրինակ՝ հետևյալ անհավասարումները համարժեք են՝

$7x - 3 > 0$ և $3 - 7x < 0$,

$5x + 4 < -3x + 2$ և $-5x - 4 > 3x - 2$:

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումը՝

$$4x - 7 < -2x + 5: \qquad (1)$$

Տեղափոխելով (1) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ՝ կստանանք՝

$$4x - 7 + 2x - 5 < 0 \qquad (2)$$

անհավասարումը, որը համարժեք է (1)-ին: Ստացված անհավասարման ձախ կողմում կատարելով նման անդամների միացում կստանանք մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարում՝

$$6x - 12 < 0,$$

որը համարժեք է (1) անհավասարմանը: Նրա բոլոր լուծումները $(-\infty,\ 2)$ միջակայքի թվերն են: Հետևաբար (1) անհավասարման բոլոր լուծումները $(-\infty,\ 2)$ միջակայքի թվերն են:

Պատ.՝ $(-\infty,\ 2)$:

Օրինակ 2. Լուծենք անհավասարումը՝

$$7x + 5 < 7x - 1: \qquad (2)$$

Տեղափոխելով (2) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ՝ կստանանք նրան համարժեք

$$7x + 5 - 7x + 1 < 0 \qquad (3)$$

անհավասարումը:

(3) անհավասարման ձախ կողմում կատարելով նման անդամների միացում, կունենանք՝

$$0 \cdot x + 6 < 0: \qquad (4)$$

Ակնհայտ է, որ գոյություն չունի x-ի որևէ թվային արժեք, որը բավարարում է (4) անհավասարմանը: Հետևաբար (4) և նրան համարժեք (2) անհավասարումները լուծում չունեն:

Պատ.՝ Լուծում չունի:

Օրինակ 3. Լուծենք անհավասարումը՝

$$9x - 5 > 9x - 6: \qquad (5)$$

Տեղափոխելով (5) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմ՝ կստանանք նրան համարժեք հավասարում՝

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0: \qquad (6)$$

(6) անհավասարման ձախ մասում կատարելով նման անդամների միացում՝ կստանանք՝

$$0 \cdot x + 1 > 0:$$

Ակնհայտ է, որ ստացված անհավասարումը ճիշտ է x-ի ցանկացած արժեքի համար: Դա նշանակում է, որ (5) անհավասարման լուծում է ցանկացած իրական թիվ, այսինքն՝ (5) անհավասարման լուծումների բազմությունը $(-\infty, +\infty)$ միջակայքն է:

Պատ.՝ $(-\infty, +\infty)$:

4.5. Ոչ խիստ գծային անհավասարումների լուծումը

$$kx + b \geqslant 0 \quad \text{կամ} \quad kx + b \leqslant 0$$

տեսքի անհավասարումները, որտեղ k-ն և b-ն տրված թվեր են, ընդ որում $k \neq 0$, անվանում են x անհայտով առաջին աստիճանի ոչ խիստ անհավասարում:

Այդպիսի անհավասարման լուծում անվանում են այն x_0 թիվը, որը անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով ստացվում է կամ թվային ճիշտ հավասարություն կամ թվային ճիշտ անհավասարություն:

Օրինակ՝ $x = 2$-ը $3x - 5 \geqslant 0$ անհավասարման լուծում է, որովհետև այդ անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 2 ստանում ենք

$$3 \cdot 2 - 5 = 1 > 0$$

թվային ճիշտ անհավասարությունը:

$x = -1$-ը $4x + 4 \leqslant 0$ անհավասարման լուծում է, քանի որ այդ անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով -1, ստանում ենք $4 \cdot (-1) + 4 = 0$ ճիշտ հավասարությունը:

Լուծել ոչ խիստ անհավասարումը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ այն լուծում չունի:

Դիտարկենք

$$kx + b \geqslant 0 \ (k \neq 0) \qquad (1)$$

անհավասարումը:

Եթե որևէ x_0 թիվ (1) անհավասարման լուծում է, ապա, ըստ ոչ խիստ անհավասարման լուծման վերը նշված սահմանման, կամ ճիշտ է

$$kx_0 + b > 0$$

թվային անհավասարությունը, կամ

$$kx_0 + b = 0$$

թվային հավասարությունը:

Այլ կերպ ասած, եթե x_0-ն (1) անհավասարման լուծում է, ապա այն կամ

$$kx + b > 0 \qquad (2)$$

անհավասարման լուծում է կամ

$$kx + b = 0 \qquad (3)$$

հավասարման լուծում:

Նկատենք նաև, որ (2) անհավասարման ցանկացած լուծում և (3) հավասարման ցանկացած լուծում (1) անհավասարման լուծումներ են:

Հետևաբար, $kx + b \geqslant 0$ անհավասարման լուծումների բազմությունը $kx + b > 0$ անհավասարման լուծումների բազմության և $kx + b = 0$ հավասարման լուծումների բազմության միավորումն է:

Նույն կերպ, $kx + b \leqslant 0$ ***անհավասարման լուծումների բազմությունը*** $kx + b < 0$ ***անհավասարման լուծումների բազմության և*** $kx + b = 0$ ***հավասարման լուծումների բազմության միավորումն է:***

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումը՝

$$3x - 7 \geqslant 0: \qquad (4)$$

Նախ լուծենք

$$3x - 7 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

Նրա միակ լուծումն է՝ $x_0 = \dfrac{7}{3}$:

Այնուհետև լուծենք

$$3x - 7 > 0 \qquad (6)$$

անհավասարումը:

(6) անհավասարման բոլոր լուծումները $x > \dfrac{7}{3}$ պայմանին բավարարող թվերն են:

Միավորելով (6) անհավասարման և (5) հավասարման լուծումների բազմությունները՝ ստանում ենք, որ (4) անհավասարման լուծումների բազմությունը $\left[\dfrac{7}{3}; +\infty\right)$ միջակայքն է:

Հաշվի առնելով գծային հավասարումների և անհավասարումների լուծման մեզ արդեն հայտնի ալգորիթմները՝ գործնականում առաջին աստիճանի ոչ խիստ անհավասարումների լուծումների բազմությունը կարելի է գրել միանգամից, հետևյալ կերպ.

ա) ցանկացած b և $k > 0$ թվերի համար $kx + b \geqslant 0$ ոչ խիստ անհավասարման լուծումների բազմությունը $x \geqslant -\frac{b}{k}$ պայմանին բավարարող բոլոր թվերն են:

բ) Ցանկացած b և $k < 0$ թվերի համար $kx + b \geqslant 0$ ոչ խիստ անհավասարման լուծումների բազմությունը $x \leqslant -\frac{b}{k}$ պայմանին բավարարող բոլոր թվերն են:

Նույն կերպ գտնում են նաև $kx + b \leqslant 0$ անհավասարման լուծումները: (Կարելի է նաև այդպիսի անհավասարումները առանձին չքննարկել, որովհետև բազմապատկելով -1-ով՝ այն կարելի է բերել նախորդ տեսքին):

Այն ոչ խիստ անհավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը x փոփոխականի նկատմամբ առաջին աստիճանի բազմանդամներ են կամ թվեր, կոչվում են x անհայտով առաջին աստիճանի ոչ խիստ գծային անհավասարումներ:

Հաշվի առնելով գծային հավասարումների և անհավասարումների համարժեք ձևափոխությունների մեզ արդեն հայտնի կանոնները՝ ստանում ենք ոչ խիստ գծային անհավասարումների լուծման հետևյալ ալգորիթմը.

1. *Անհայտ պարունակող անդամները տեղափոխում են անհավասարման մի կողմ (օրինակ՝ ձախ կողմ), իսկ թվերը՝ մյուս: Ընդ որում, տեղափոխվող անդամների նշանները փոխվում են իրենց հակադիր նշաններով:*
2. *Ձախ և աջ մասերում կատարում են նման անդամների միացում:*
3. *Եթե անհայտի գործակիցը զրոյից տարբեր է, ապա լուծում ենք ստացված ոչ խիստ առաջին աստիճանի հավասարումը վերը նշված եղանակով:*

Իսկ եթե անհայտի գործակիցը 0 է (այլ կերպ ասած՝ x-երը «ոչնչանում» են), ապա հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

ա) $0 \cdot x \geqslant b$, որտեղ $b > 0$: (1)

Պարզ է, որ այս անհավասարմանը չի բավարարում x-ի ոչ մի թվային արժեք, այսինքն՝ անհավասարումը լուծում չունի:

բ) $0 \cdot x \geqslant b$, որտեղ $b \leqslant 0$: (2)

Պարզ է, որ ցանկացած թիվ այս անհավասարման լուծում է: Նույն կերպ քննարկվում է $0 \cdot x \leqslant b$ դեպքը:

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումը՝

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x - 3 \leqslant 2x - 1:$$

Լուծում:

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x - 2 \leqslant -1 + 3,$$

$$-\frac{7}{4}x \leqslant 2,$$

$$x \geqslant -\frac{8}{7}:$$

Պատ.՝ $x \in \left[-\frac{8}{7}; +\infty\right)$:

Օրինակ 2. Լուծենք անհավասարումը՝

$$4 - 6x \geqslant 9 - 6x:$$

Լուծում:

$$-6x + 6x \geqslant 9 - 4,$$

$$0 \cdot x \geqslant 5:$$

Պատ.՝ ϕ:

Առաջադրանքներ

409. ա) Ո՞ր անհավասարումն են անվանում մեկ անհայտով գծային անհավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում գծային անհավասարման անդամ:
գ) Ինչպիսի՞ անհավասարումներն են անվանում համարժեք:
դ) Ձևակերպեք անհավասարումների համարժեքության մասին պնդումները:
ե) Ի՞նչ է նշանակում լուծել ոչ խիստ գծային անհավասարումը:

410. Անհավասարումը բերեք $kx + b > 0$ կամ $kx + b < 0$ տեսքի.

ա) $3x - 2 > 7x + 5$; բ) $4 - 6x < 9 - x$;
գ) $7 > 0{,}2x$; դ) $8 - 2(3 - 2x) < 1$:

411. Փակագծերում նշված թիվը արդյոք անհավասարման լուծո՞ւմ է.

ա) $4x - 4 > 3x + 3$ (-1); բ) $2 + 12x < -x + 3$ (-2);
գ) $5x - 7 > 9 + x$ (100); դ) $72x - 18 < -13x$ (-10);

412. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները.

ա) $2x - 1 > 6$ և $6 > 2x - 1$; բ) $x < 3$ և $x + 2 < 5$;

գ) $2x > 4$ և $x < 2$; դ) $2x > 5$ և $x - 7 > -2 - x$;

ե) $2 < 7 - x$ և $3x < 5 + 2x$; զ) $3x - 7 > 5$ և $-3x + 7 < -5$:

Լուծեք անհավասարումը (413-423).

413. ա) $x + 4 > 5x$; բ) $x - 2 < 3x$;

գ) $2x + 1 < x$; դ) $7x - 13 > 9x$:

414. ա) $2x - x - 1 < 2$; բ) $3 < 7x - 5 - 4x$;

գ) $5x - 2x - 8x + x - 12x > 7 - 2x$; դ) $8 - 9x > x - 3 - 3x + 4x + 15$:

415. ա) $x - 2 < x$; բ) $x + 5 > x$;

գ) $6 - 3x > 1 - 3x$; դ) $12 + 4x < 3 - x + 5x$:

416. ա) $x + 2 < x$; բ) $x - 5 > x$;

գ) $4 - 8x < -8x + 4$; դ) $x - 3 + 2x < 4 + 3x - 1$:

417. ա) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x + 5 > \frac{1}{3}x - 1$; բ) $\frac{1}{2}x - 3 < 2 - \frac{1}{3}x$;

գ) $1 - \frac{3}{7}x - 5 < 6 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{21}x$; դ) $2x - \frac{3}{5}x > 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2$;

ե) $\frac{2}{5}x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{13}{20}$; զ) $3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x < 14 + \frac{1}{12}x$:

418. ա) $1{,}2 - 2{,}6x - 5 > 3{,}2x - 3$;
բ) $x - 1{,}2 < 0{,}3x + 3{,}7$;
գ) $7 - 0{,}2x < 21{,}28 - 1{,}6x$;
դ) $0{,}8x + 0{,}12 - 0{,}3x > 76{,}2 - 0{,}1x + 0{,}6x$;
ե) $1{,}52 - 2{,}8x < 1{,}72 - 5{,}2x$;
զ) $0{,}014 - 12{,}5x > 1{,}25 - 0{,}5x + 1{,}086 - 12x$:

419. ա) $2x + (3x - 1) > 4$; բ) $x - 16 < (5 - 2x) - x - 1$;

գ) $2x - (x - 1) < 3$; դ) $(2x - 3) - (x + 1) > 1$:

420. ա) $(x + 1) - (2x + 3) - (1 - 7x) < x - (8 - 5x)$;
բ) $(3x - 11) - (5 - 9x) + (x - 1) > 1 - 4x - (12 + x)$:

421. ա) $2(x-1)<4$; բ) $3(2x-1)>12$;
գ) $4(1+x)<8-4x$; դ) $25-10x>-5(2x-7)$:

422. ա) $x(2-x)<(3-x)(3+x)$;
բ) $3(x-1)(x+1)>3(1+x^2)$;
գ) $(x-2)(x-3)+(4-x)(x+2)>0$;
դ) $(2x-1)(x+2)-(x-5)(2x+1)>0$:

423. ա) $\frac{x-1}{3}<1$; բ) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>2$;
գ) $\frac{2x}{3}<\frac{x}{4}-1$; դ) $\frac{3x}{2}+\frac{x}{6}-\frac{2x}{3}>8$;
ե) $\frac{x-4}{5}>2-\frac{x}{3}$; զ) $\frac{2x+1}{4}+2<\frac{3x+2}{3}$;
է) $\frac{x-1}{2}-\frac{x}{4}<\frac{x}{6}+\frac{x-2}{3}$; ը) $\frac{7x-2}{4}>1-\frac{x-1}{3}+2\frac{1}{12}x$:

424. -2-ը տված ոչ խիստ անհավասարման լուծո՞ւմ է.
ա) $2+x\geqslant 0$; բ) $4+2x\leqslant 0$; գ) $7-x\leqslant 0$;
դ) $9+5x\geqslant 2-3x$; ե) $4x\geqslant -5+4x$; զ) $2(1+x)\leqslant 2x$:

Լուծեք ոչ խիստ անհավասարումը (425, 426).

425. ա) $3{,}1-2x\geqslant 5{,}1-x$; բ) $3x-6\leqslant (1-3x)-2x+1$;
գ) $(2x-1)-(5-3x)\geqslant 2-5x$; դ) $(x-2)(x+2)\leqslant 4-x+x^2$:

426. ա) $\frac{2x+1}{5}\geqslant 2$; բ) $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}\leqslant 1$;
գ) $\frac{4x+3}{2}\geqslant 2-\frac{2x-1}{3}$; դ) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}\leqslant 5$:

427. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները.
ա) $3-2x\geqslant 1$ և $6-4x\geqslant 2$; բ) $4+x\leqslant x$ և $x<x$;
գ) $7-3x\geqslant -3x$ և $x\geqslant x$; դ) $3+2x\geqslant 0$ և $6+4x>0$:

428. Կարո՞ղ է արդյոք մեկ անհայտով առաջին աստիճանի անհավասարումը.
ա) ճիշտ լինել անհայտի ցանկացած արժեքի համար,
բ) լուծում չունենալ:

429. Կարո՞ղ է արդյոք մեկ անհայտով գծային անհավասարումը
ա) ճիշտ լինել անհայտի ցանկացած արժեքի համար,
բ) լուծում չունենալ:

4.6. Մեկ անհայտով գծային անհավասարումների համակարգեր

Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը միաժամանակ հանդիսանում է մեկ անհայտով տրված մի քանի գծային անհավասարումների կամ ոչ խիստ անհավասարումների լուծում, ապա ասում են, որ պետք է լուծել ***մեկ՝*** x ***անհայտով գծային անհավասարումների համակարգ:***

Գծային անհավասարումների համակարգը լուծելու համար պետք է լուծել այդ համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարում, այնուհետև գտնել ստացված լուծումների բազմությունների ընդհանուր մասը (հատումը). որն էլ հենց կլինի համակարգի լուծումների բազմությունը:

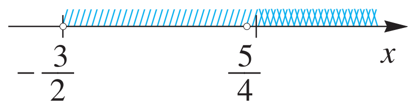
Սովորաբար համակարգի անհավասարումները գրում են իրար տակ՝ սյունով, և ձախից դնում ձևավոր փակագծի նշան:
Դիտարկենք անհավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ -4x + 5 < 0: \end{cases} \qquad (1)$$

Լուծելով (1) համակարգի առաջին անհավասարումը՝ կստանանք, որ նրա լուծումների բազմությունը $\left(-\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$ միջակայքն է: Լուծելով համակարգի երկրորդ անհավասարումը՝ ստանում ենք, որ նրա բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(\dfrac{5}{4};\ +\infty\right)$ միջակայքն է: Այժմ գտնենք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում (1) համակարգի երկու անհավասարումներն էլ միաժամանակ դառնում են թվային ճիշտ անհավասարություններ, այսինքն՝ գտնենք $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ և $\left(\dfrac{5}{4};+\infty\right)$ միջակայքերի ընդհանուր մասը: Դրա համար Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք այդ երկու միջակայքերը: Նկար 25-ից երևում է, որ այդ միջակայքերի ընդհանուր մասը $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ միջակայքն է:

Հետևաբար (1) համակարգի լուծումների բազմությունը $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ միջակայքն է:



Նկ. 25

Պատ.՝ $\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$:

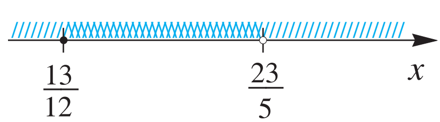
Օրինակ 2. Լուծենք անհավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} 5x - 23 < 0, \\ 12x - 13 \geqslant 0: \end{cases} \qquad (2)$$

Լուծելով (2) համակարգի անհավասարումներից յուրաքանչյուրը՝ գտնում ենք, որ առաջին անհավասարման լուծումների բազմությունը բաղկացած է այնպիսի x թվերից, որոնք փոքր են $\frac{23}{5}$-ից, իսկ երկրորդի լուծումների բազմությունը՝ $x \geqslant \frac{13}{12}$ անհավասարությանը բավարարող բոլոր թվերն են:

(2) համակարգի լուծումների բազմությունը կլինի բոլոր այն թվերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար (2) համակարգի երկու անհավասարումները միաժամանակ դառնում են ճիշտ թվային անհավասարություններ: Հետևաբար դրանք կլինեն այն բոլոր թվերը, որոնք մեծ են կամ հավասար $\frac{13}{12}$-ից, բայց փոքր են $\frac{23}{5}$-ից, այսինքն՝ $\frac{13}{12} \leqslant x < \frac{23}{5}$ միջակայքի բոլոր թվերը (նկ. 26):

Այսպիսով, (2) համակարգի լուծումների բազմությունը $\left[\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$ միջակայքն է:



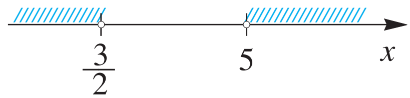
Նկ. 26

Պատ.՝ $\left[\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$:

Օրինակ 3. Լուծենք անհավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} x-5>0, \\ 2x-3<0: \end{cases} \qquad (3)$$

(3) համակարգի առաջին անհավասարման լուծումները բոլոր $x>5$ թվերն են, իսկ երկրորդի լուծումները՝ բոլոր $x<\frac{3}{2}$ թվերը: Ուստի (3) համակարգի լուծումներ կարող են լինել միայն այն թվերը, որոնք մեծ են 5-ից, բայց փոքր են $\frac{3}{2}$ -ից: Ակնհայտ է, որ այդպիսի թվեր չկան (նկ. 27): Հետևաբար (3) համակարգը լուծում չունի:



Նկ. 27

Պատ.՝ Լուծումներ չկան
⌈(հակիրճ գրում են՝ ϕ):⌋

Անհավասարումների համակարգը երբեմն կարելի է գրառել կրկնակի անհավասարման տեսքով: Օրինակ՝

$$\begin{cases} 2x-5>0, \\ 2x+5<7 \end{cases} \qquad (4)$$

անհավասարումների համակարգը կարելի է գրել

$$0<2x-5<7 \qquad (5)$$

կրկնակի անհավասարման տեսքով:

Այդպիսի անհավասարումը լուծելիս կարելի է և չառանձնացնել անհավասարությունները.

$$5<2x<7+5,$$
$$2{,}5<x<6:$$

Հետևաբար (5) կրկնակի անհավասարման բոլոր լուծումները կազմում են (2,5; 6) միջակայքը:

Պատ.՝ (2,5; 6):

Առաջադրանքներ

430. Ի՞նչ է նշանակում լուծել մեկ անհայտով գծային անհավասարումների համակարգը:

431. Գտեք անհավասարումների գոնե մեկ ընդհանուր լուծում.

ա) $x > 3$ և $x > 2$; բ) $x < -2$ և $x < -1$;

գ) $x + 1 > 0$ և $x - 1 > 0$; դ) $x - 2 < 0$ և $x + 2 < 0$;

ե) $2x > -4$ և $x + 2 < 0$; զ) $3x < 9$ և $x + 3 > 0$:

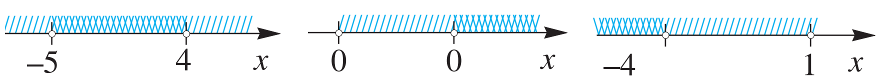
Կոորդինատային ուղղի վրա նշեք անհավասարումների համակարգի լուծումները (եթե դրանք գոյություն ունեն) (432-434).

432. ա) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x > 0, \\ x > 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -5: \end{cases}$

433. ա) $\begin{cases} x < 7, \\ x < 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x < -1, \\ x < 3; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x < -5, \\ x < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x < -10, \\ x < -16: \end{cases}$

434. ա) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x < -5, \\ x > -7; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -5: \end{cases}$

435. Գրեք անհավասարումների որևէ համակարգ, որի լուծումների բազմությունը նկ. 28-ում պատկերված է կրկնակի ստվերագծերով.



ա) բ) գ)

Նկ. 28

436. Փակագծերում նշված թիվը արդյոք անհավասարումների համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 7 - 4x > 0 \end{cases}$ (-1); բ) $\begin{cases} 5x > 10, \\ 6x + 1 < 0 \end{cases}$ (3);

գ) $\begin{cases} 8 - x < 0, \\ 3x \geqslant 3 \end{cases}$ (2); դ) $\begin{cases} 7x - 10 \leqslant 0, \\ 3x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ $(0{,}6)$:

437. $2x < 1$ անհավասարման համար ընտրեք ևս մեկ անհավասարում այնպես, որ ստացված անհավասարումների համակարգը՝

ա) լուծում չունենա,

բ) լուծումների բազմությունը լինի $(-\infty; 0{,}5)$ միջակայքը։

Լուծեք անհավասարումների համակարգը (438-441).

438. ա) $\begin{cases} 3 > x, \\ x < 4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 4x < 15, \\ -7 < x + 5; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} 6x > 6, \\ 1 > 3 - 2x; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 6 - 2x > 5, \\ 3 - 2x > 1; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 2x - 8 > 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 5x + 3 < 8, \\ 7 - 3x > 2; \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 1, \\ 5x - 1 > 13; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 7x < x - 6, \\ 2 > 5 + 3x: \end{cases}$

439. ա) $\begin{cases} 2x + 7 > 3 - x, \\ \dfrac{1}{3}x - 1 > 2x - \dfrac{1}{4}; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x > 8, \\ \dfrac{3}{4}x - 1 > \dfrac{3}{5}x - 1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} < 1, \\ 4 - x > \dfrac{x - 5}{3}; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{3} > \dfrac{3 - x}{2}, \\ \dfrac{x}{7} - 1 < \dfrac{2 - 8x}{4}: \end{cases}$

440. ա) $\begin{cases} 3 - 2x \geqslant 0, \\ 4 + x \leqslant 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 7 + 5x \geqslant 2, \\ 2 + 3x \leqslant 10; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 8 - 2x \geqslant 0, \\ 6x \geqslant 24; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2 - 5x}{3} \geqslant \dfrac{7 - x}{2}, \\ \dfrac{-4 - x}{5} \leqslant 2 - \dfrac{-x}{5}: \end{cases}$

441. ա) $\begin{cases} 6 + x > 3 - 2x, \\ 4 - x \leqslant -2x + 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 5 - 2x \geqslant 2(1 - x), \\ \dfrac{7 + 3x}{4} > \dfrac{x}{2} - 1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3 - x}{4} \geqslant \dfrac{1 - x}{2} - x, \\ 5 - 3x < (x - 1)(x + 1) - x^2; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x - 3 \leqslant \dfrac{4}{3}x - 2, \\ 4(1 + 3x) < 9 - 2x: \end{cases}$

442. Լուծեք կրկնակի անհավասարումը.

ա) $0 < 3x < 2$; բ) $-1 < \dfrac{2}{7}x \leqslant 8$;

գ) $1 < x + 4 < 2$; դ) $-7 < x - 6 < -2$;

ե) $0 \leqslant 3x - 7 < 3$; զ) $-8 < 0,5x + 1 < 4$:⌋

⌈4.7. Մեկ անհայտով գծային հավասարումների և անհավասարումների համախմբեր

Դիցուք՝ տրված են x անհայտով մի քանի գծային հավասարումներ և անհավասարումներ կամ միայն հավասարումներ (անհավասարումներ):

Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը դրանցից գոնե մեկի լուծում է, ապա ասում են, որ պետք է լուծել ***մեկ՝ x անհայտով համախումբ:***

Լուծել համախումբը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծում չկա:

Համախումբը լուծելու համար պետք է լուծել այդ համախմբի յուրաքանչյուր հավասարումը կամ անհավասարումը և այնուհետև գրնել ստացված լուծումների բազմությունների միավորումը. որն էլ հենց կդառնա տվյալ համախմբի լուծումների բազմությունը:

Սովորաբար համախմբի հավասարումները և անհավասարումները գրում են իրար տակ՝ սյունով, և ձախից դնում քառակուսի փակագծի նշան:

Ասում են, որ *հավասարումը (անհավասարումը) համարժեք է համախմբին,* եթե հավասարման (անհավասարման) յուրաքանչյուր լուծում համախմբի լուծում է, իսկ համախմբի յուրաքանչյուր լուծում հավասարման (անհավասարման) լուծում է:

Նման կերպ սահմանվում են հավասարման (անհավասարման) և համակարգի, ինչպես նաև համախմբերի համարժեքությունը:

Դիտողություն: Երբեմն համարժեքությունը գրառելու համար գործածում են համարժեքության $\Leftrightarrow$ նշանը:

Ինչպես վերը նշվեց, համախումբը կարող է նաև բաղկացած լինել միայն հավասարումներից կամ միայն անհավասարումներից:

Դիտարկենք համախմբերի լուծման օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{aligned} &5x-2<3, \\ &4x+3\geqslant 0: \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Լուծում:

$$\left[\begin{aligned} &5x<5, \\ &4x\geqslant -3; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &x<1, \\ &x\geqslant -\frac{3}{4}; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &x\in(-\infty;\ 1), \\ &x\in[-\frac{3}{4};\ +\infty]: \end{aligned}\right.$$

Ըստ երկու բազմությունների միավորման սահմանման՝

$$(-\infty;\ 1)\cup[-\frac{3}{4};\ +\infty] = (-\infty;\ +\infty):$$

Պատ.՝ Բոլոր իրական թվերի բազմությունը՝ R:

Օրինակ 2. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{aligned} &2x\geqslant 1, \\ &4x\geqslant 5: \end{aligned}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{aligned} &x\geqslant \frac{1}{2}, \\ &x\geqslant \frac{5}{4}; \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &x\in\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right), \\ &x\in\left[\frac{5}{4};\ +\infty\right): \end{aligned}\right.$$

$$\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)\cup\left[\frac{5}{4};\ +\infty\right) = \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right):$$

Պատ.՝ $x\in\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right):$

Օրինակ 3. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{aligned} &4x-3>1, \\ &5x-4\leqslant 1: \end{aligned}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}4x > 4,\\ 5x \leqslant 5;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x > 1,\\ x \leqslant 1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x \in (1; +\infty),\\ x \in (-\infty; 1]:\end{array}\right.$$

$$(-\infty; 1]\cup(1; +\infty) = (-\infty; +\infty):$$

Պատ.՝ R:

Օրինակ 4. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{array}{l}2x - 5 = 0,\\ x + 1 < 0:\end{array}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}2x = 5,\\ x < -1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{5}{2},\\ x < -1:\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x \in (-\infty; -1)\cup\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$:

Օրինակ 5. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{array}{l}4 + 2x = 0,\\ 7 - 3x = 0,\\ x - 8 > 0:\end{array}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}2x = -4,\\ -3x = -7,\\ x > 8;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = -2,\\ x = \dfrac{7}{3},\\ (8; +\infty):\end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x \in \left\{-2; \dfrac{7}{3}\right\}\cup(8; +\infty)$:

Օրինակ 6. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{array}{l}6 - 3x = -x,\\ 2(x - 1) \leqslant 2x - 2:\end{array}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l}6 - 3x = -x,\\ 2x - 2x \leqslant -2 + 2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = 3,\\ 0 \cdot x \leqslant 0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = 3,\\ x \in (-\infty; +\infty):\end{array}\right.$$

$$x \in \{3\}\cup(-\infty; +\infty) = (-\infty; +\infty):$$

Պատ.՝ $(-\infty; +\infty)$:

Օրինակ 7. Լուծենք համախումբը՝

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 3(x - 2), \\ \dfrac{1 + x}{4} > 2: \end{array}\right.$$

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 3x = -6 + 1, \\ x > 8 - 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0 \cdot x = -5, \\ x > 7; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \phi, \\ (7; +\infty): \end{array}\right.$$

Պատ.՝ $(7; +\infty)$:

Առաջադրանքներ

443. 2, 3, –5 թվերից ո՞րն է տրված համախմբի լուծում.

ա) $\left[\begin{array}{l} 4 - 4x < 0, \\ 7x - 1 > 2; \end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} 2 + 5x \leqslant 0, \\ x > 2, \\ 3x = 0; \end{array}\right.$ գ) $\left[\begin{array}{l} 4 - 3x < x, \\ 6 + 6x > 7 - 7x: \end{array}\right.$

444. Լուծեք համախումբը.

ա) $\left[\begin{array}{l} 3(1 + x) - 2 < 5(2 - 5x) - 3x, \\ 2(4 - x) - 3 > 4x - 7; \end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} 2(3y - 1) - 1 \geqslant 4 - 5y, \\ 6y - 6 \leqslant 6(y - 1); \end{array}\right.$

գ) $\left[\begin{array}{l} 3x + 3 > 3(x + 1), \\ 2x - 2 < 2(x - 1); \end{array}\right.$ դ) $\left[\begin{array}{l} 4 - 4x \geqslant 4(1 - x), \\ 5x + 1 < 5x - 1; \end{array}\right.$

ե) $\left[\begin{array}{l} 3(2 - z) - 5z < -4(27 - 3) + z, \\ 6(z - 3) \geqslant 4z + 3; \end{array}\right.$ զ) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant x + 5, \\ 4x - 3 > 3 - 4x; \end{array}\right.$

է) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1 + x}{3} - \dfrac{x}{2} = 5, \\ \dfrac{4 - 7x}{2} > -1; \end{array}\right.$ ը) $\left[\begin{array}{l} 2x = 1, \\ 3 + x = 5 - \dfrac{x}{2}, \\ 2(1 - x) = 5 - 2x; \end{array}\right.$

թ) $\left[\begin{array}{l} 10 - 2x = \dfrac{3 + x}{3}, \\ 4x = 0; \end{array}\right.$ ժ) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2 - 5x}{2} = -1, \\ 3(x - 2) \leqslant 1 + 3x, \\ 2x > 2 - 3x: \end{array}\right.$

❖ **445.** Ապացուցեք, որ եթե.

ա) x_0-ն $\left[\begin{array}{l} k_1x + b_1 < 0, \\ k_2x + b_2 > 0 \end{array}\right.$ համախմբի լուծում չէ,

ապա $\begin{cases} k_1x + b_1 \geqslant 0, \\ k_2x + b_2 \leqslant 0 \end{cases}$ համակարգի լուծում է:

բ) x_0-ն $\left[\begin{array}{l} k_1x + b_1 \geqslant 0, \\ k_2x + b_2 > 2 \end{array}\right.$ համախմբի լուծում է,

ապա $\begin{cases} k_1x + b_1 < 0, \\ k_2x + b_2 \leqslant 2 \end{cases}$ համակարգի լուծում չէ:⌋

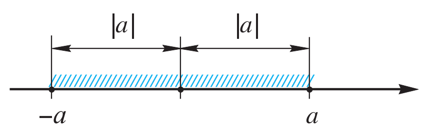
4.8. Մոդուլի (բացարձակ արժեքի) նշան պարունակող հավասարումների և անհավասարումների լուծումը

Նախ, վերհիշենք a թվի մոդուլի (բացարձակ արժեքի) սահմանումը՝

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ եթե } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ եթե } a \leqslant 0: \end{cases}$$

Օրինակ՝ $|7| = 7$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$:

Սահմանումից հետևում է, որ ցանկացած թվի մոդուլը ոչ բացասական թիվ է: Ավելի ճիշտ՝ զրոյից տարբեր a թվի մոդուլը դրական թիվ է, իսկ զրոյի մոդուլը զրո է: Եթե թվային ուղղի վրա նշենք a և $-a$ թվերը ($a \neq 0$), ապա $|a|$-ն այդ թվերը պատկերող կետերից յուրաքանչյուրի հեռավորությունն է սկզբնակետից (0 թիվը պատկերող կետից) (նկ. 29-ում a-ն դրական թիվ է):



Նկ. 29

Հաշվի առնելով ասվածը՝ ստանում ենք, որ

$$|x| = \mathrm{A} \qquad (1)$$

հավասարումը $\mathrm{A} < 0$ դեպքում լուծում չունի, $\mathrm{A} = 0$ դեպքում ունի միակ լուծում՝ $x = 0$, իսկ $\mathrm{A} > 0$ դեպքում՝ ճիշտ երկու լուծում՝ $x = \mathrm{A}$ և $x = -\mathrm{A}$:

Օրինակ. Լուծենք հավասարումը՝

$$|2 - 3x| = 5:$$

Այս հավասարումը համարժեք է հետևյալ համախմբին՝

$$\left[\begin{array}{l} 2 - 3x = 5, \\ 2 - 3x = -5; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = \dfrac{7}{3}: \end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x = -1$, $x = \dfrac{7}{3}$:

Ելնելով մոդուլի երկրաչափական մեկնաբանությունից՝ տեսնում ենք, որ $A > 0$ դեպքում

$$|x| < A \ (\text{կամ} \leqslant A) \qquad (2)$$

անհավասարմանը բավարարում են միայն $-A < x < A$ (կամ $-A \leqslant x \leqslant A$) պայմանին բավարարող թվերը, և հակառակը. այդ պայմանին բավարարող ցանկացած թիվ (2) անհավասարման լուծում է: Այլ կերպ ասած՝ (2) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x < A, \\ x > -A \end{cases} \text{համակարգին:}$$

$A > 0$ դեպքում

$$|x| > A \ (\text{կամ} \geqslant A) \qquad (3)$$

անհավասարմանը բավարարում են այն և միայն այն թվերը, որոնք բավարարում են $x > A$ ($\geqslant A$) կամ $x < -A$ ($\leqslant -A$) պայմանին: Այլ կերպ ասած՝ (3) անհավասարումը համարժեք է

$$\left[\begin{array}{l} x > A, \\ x < -A \end{array}\right.$$

համախմբին:

Մոդուլի սահմանումից անմիջապես հետևում է նաև, որ $A < 0$ դեպքում $|x| < A$ (կամ $\leqslant A$) անհավասարումը լուծում չունի, իսկ $|x| > A$ (կամ $\geqslant A$) անհավասարման լուծում է հանդիսանում ցանկացած թիվ:

Պարզ է նաև, որ $|x| > 0$ անհավասարման լուծումներն են զրոյից տարբեր բոլոր թվերը, իսկ $|x| < 0$ անհավասարումը լուծում չունի:

Օրինակներ.

1. Լուծենք $|6 + 5x| > 2$ անհավասարումը:

Լուծում:

$$\left[\begin{array}{l} 6 + 5x > 2, \\ 6 + 5x < -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > -\dfrac{4}{5}, \\ x < -\dfrac{8}{5}: \end{array}\right.$$

Պատ.՝ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{8}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$:

2. Լուծենք $|4 - 4x| \leqslant 0$ անհավասարումը:

Լուծում:

Մոդուլի սահմանումից հետևում է, որ այստեղ հնարավոր է միայն $4 - 4x = 0$ դեպքը:

Պատ.՝ $x = 1$:

3. Լուծենք $|7 - 2x| \leqslant 2$ անհավասարումը:

Ըստ վերն ասվածի՝ այս անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 7 - 2x \leqslant 2, \\ 7 - 2x \geqslant -2 \end{cases}$$

համակարգին, որը լուծելով ստանում ենք $x \in \left[\dfrac{5}{2}; \dfrac{9}{2}\right]$ պատասխանը:

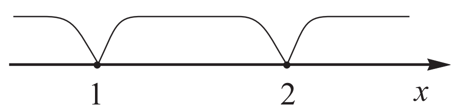
Մոդուլի նշան պարունակող ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների և անհավասարումների լուծման համար կիրառվում է ***միջակայքերի եղանակը,*** որի իմաստը այն է, որ այս կամ այն դատողություններով կոորդինատային առանցքը տրոհվում է ինչ-որ քանակի միջակայքերի, այնուհետև դրանց վրա հետազոտվում է դիտարկվող խնդիրը:

Օրինակ. Լուծենք

$$|x - 1| + |x - 2| = 6 \tag{5}$$

հավասարումը:

Նախ լուծենք $x - 1 = 0$ և $x - 2 = 0$ հավասարումները և կոորդինատային առանցքի վրա նշենք ստացված $x_1 = 1$ և $x_2 = 2$ թվերը (նկ. 30):



Նկ. 30

Կստանանք $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$ և $[2; +\infty)$ միջակայքերը (կարելի է դիտարկել նաև $(-\infty; 1]$, $[1; 2]$ և $[2; +\infty)$ միջակայքերը. այլ կերպ ասած, կարևոր չէ, թե 1 և 2 կետերը որ միջակայքերի ծայրակետեր են դիտարկվում):

(5) հավասարումը լուծենք այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում:

1) $(-\infty; 1)$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$|x - 1| = -(x - 1), \quad |x - 2| = -(x - 2),$$

(քանի որ $x < 1$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $-(x-1)-(x-2)=6$ հավասարմանը, որն ունի $x=-1{,}5$ միակ արմատը: Այդ թիվը պատկանում է $(-\infty;\ 1)$ միջակայքին, ուրեմն (5) հավասարումը դիտարկվող միջակայքում ունի $x=-1{,}5$ միակ արմատը:

2) $[1;\ 2)$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|x-1|=x-1,\ |x-2|=-(x-2)$$

(քանի որ $x-1\geqslant 0,\ x-2<0$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $x-1-(x-2)=6$ հավասարմանը, որը լուծում չունի:

3) $[2;\ +\infty]$ միջակայքում, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|x-1|=x-1,\quad |x-2|=x-2$$

(քանի որ $x-1>0,\ x-2\geqslant 0$), հետևաբար այդ միջակայքում (5) հավասարումը համարժեք է $x-1+x-2=6$ հավասարմանը, որն ունի $x=4{,}5$ միակ լուծումը: Այդ թիվը պատկանում է $[2;\ +\infty)$ միջակայքին, հետևաբար (5) հավասարումը դիտարկվող միջակայքում ունի միակ՝ $x=4{,}5$ արմատը:

Այսպիսով, սկզբնական հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_1=-1{,}5 \text{ և } x_2=4{,}5:$$

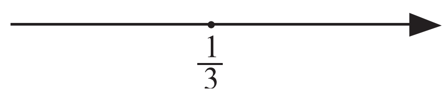
Պատ.՝ $-1{,}5$ և $4{,}5$:

Նույն ձևով լուծում են նաև մոդուլի նշան պարունակող անհավասարումները:

Օրինակ. Լուծենք անհավասարումը՝

$$2|1-3x|>9+4x: \tag{6}$$

Նախ լուծենք $1-3x=0$ հավասարումը և կոորդինատային ուղղի վրա նշենք այդ հավասարման $x=\frac{1}{3}$ արմատը (նկ. 31):



Նկ. 31

Կստանանք $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$ և $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ միջակայքերը:

$\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$ միջակայքում $1-3x\geqslant 0$, ուստի, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|1-3x|=1-3x:$$

Հետևաբար այդ միջակայքում (6) անհավասարումը համարժեք է

$$2(1-3x)>9+4x$$

անհավասարմանը: Ոստի պետք է լուծել այս անհավասարումը և նրա լուծումների բազմությունից առանձնացնել $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$ միջակայքին պատկանող կետերը: Այլ կերպ ասած՝ պետք է լուծել հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 2 - 6x > 9 + 4x: \end{cases}$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{7}{10}\right)$:

$\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ միջակայքում $1 - 3x \leqslant 0$, ուստի, ըստ մոդուլի սահմանման,

$$|1 - 3x| = -(1 - 3x),$$

և ստանում ենք

$$\begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ 2 - 6x > 9 + 4x \end{cases}$$

համակարգը, որի լուծումների բազմությունը $\left(\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$ միջակայքն է:

Մնում է միավորել ստացված երկու բազմությունները

Պատ.՝ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{7}{10}\right) \cup \left(\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$:

Առաջադրանքներ

446. Թվային ուղղի վրա նշեք անհավասարման լուծումների բազմությունը.

ա) $|x| < 2$, բ) $|x| > 1$,

գ) $|x| \leqslant 1{,}5$, դ) $|x| \geqslant 0{,}2$:

447. Լուծեք հավասարումը (447-449).

ա) $|x| = 9$, բ) $|x| = 1{,}5$, գ) $|x - 1| = 2$,

դ) $|x - 2| = 1$, ե) $|x + 3| = 1$, զ) $|x + 1| = 3$:

448. ա) $|2x - 1| = 5$, բ) $|3x + 2| = 4$,

գ) $|7 - 3x| = 4$, դ) $|-2 - 3x| = 5$:

449. ա) $|x| = x + 2$, բ) $|x| = 2x + 1$,

գ) $|x - 3| = 3x$, դ) $|x + 2| = 2x$:

❖ **450.** Լուծեք հավասարումը.

ա) $|1 + 3x| - |x - 1| = 2 - x$, բ) $|x| + |-x| = 2x$,

գ) $|2 + x| + |-2 - x| = 4 + 2x$,

451. Լուծեք անհավասարումը (451-453).

ա) $|3x - 6| > x + 2$, բ) $|2x - 5| < x - 1$,

գ) $|3x - 7| > 2x - 3$, դ) $|2x - 7| \leqslant 0,5x + 2$:

❖ **452.** ա) $|x - 1| + 10 \geqslant 8|x - 1| + 6$, բ) $|x - 2| + 8 < 9|x - 2| + 3$,

գ) $|x - 3| + 6 \leqslant 8|x - 3| + 4$, դ) $|x - 2| + 7 > 3|x - 2| + 2$:

453. ա) $|x + 1| + |x + 3| \leqslant 8$, բ) $|x + 2| + |x + 4| < 6$,

գ) $|x + 3| + |x - 2| > 5$, դ) $|x + 7| + |x + 1| \geqslant 9$:

Լուծեք հավասարումը (454, 455).

454. ա) $|x - 1| = 2x + 4$, բ) $|x - 2| = 2x + 1$,

գ) $|x - 1| + |x + 1| = 4$, դ) $|x - 3| + |x + 3| = 8$,

ե) $|x - 1| + |x - 3| = 2$, զ) $|x + 1| + |x - 5| = 7$:

455. ա) $|x - 1| = x - 1$, բ) $|x - 2| = 2 - x$:

456. Գրեք հավասարումների համախումբ, որը համարժեք է տրված հավասարմանը.

ա) $|x| = 5$, բ) $|x| = 4$:

457. Գրեք անհավասարումների համախումբ, որը համարժեք է տրված անհավասարմանը.

ա) $|x| > 5$, բ) $|x| > 4$:

458. Գրեք անհավասարմանը համարժեք անհավասարումների համակարգ.

ա) $|x| < 5$, բ) $|x| \leqslant 4$:

459. Գրեք մոդուլի նշան պարունակող անհավասարում, որի լուծումների բազմությունն է.

ա) $(-2; 2)$, բ) $[-6; 6]$,

գ) $(-\infty; -1]\cup[1; +\infty)$, դ) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$:

460. Լուծեք հավասարումը.

ա) $|x| = |-x|$,　　　　բ) $|2 + 5x| + |-x| = -1$,

գ) $2|x - 3| + |x - 3| = 0$:

461. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $|3x - 2| \leqslant 0$,　　　　բ) $|4 - 5x| > 0$,

գ) $|7 - x| \geqslant 0$,　　　　դ) $|3 - 2x| \leqslant -6$,

ե) $|4 + 4x| \geqslant -5$:

ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ

$$\sqrt{a^2} = |a|,\ a \in \mathrm{R}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\ (a \geqslant 0)$$
$$\ldots$$

5.1. $y = x^2$ ֆունկցիայի հատկությունները և գրաֆիկը

Հաշվի առնելով, որ այս ֆունկցիան հետագայում հանրահաշվի դասընթացում կարևոր նշանակություն է ունենալու, կատարենք նրա մանրամասն հետազոտում:

x փոփոխականի թույլատրելի արժեքների բազմությունը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է կամ, ինչպես ընդունված է ասել, $y = x^2$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը իրական թվերի բազմությունն է՝ R-ը:

Քանի որ ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է, ուստի y-ն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ:

Ձևակերպենք և հիմնավորենք $y = x^2$ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ:

1) ***Եթե*** $x = 0$, ***ապա*** $y = 0$:

Այս հատկությունը ակնհայտ է:

2) ***Եթե*** $x > 0$, ***ապա*** $y > 0$:

Իրոք, եթե $x > 0$, ապա $y = x^2 = x \cdot x$-ը երկու դրական թվերի արտադրյալ է: Դրա համար էլ $y > 0$:

3) x***-ի ոչ բացասական արժեքների համար*** $y = x^2$ ***ֆունկցիան աճող է, այսինքն՝*** x***-ի մեծ արժեքին համապատասխանում է*** y***-ի մեծ արժեք: Այլ կերպ ասած, եթե*** x_1***-ը և*** x_2***-ը ոչ բացասական թվեր են և*** $x_1 < x_2$, $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, ***ապա*** $y_1 < y_2$:

Իրոք, եթե $x_1 = 0$ և $x_1 < x_2$, ապա $x_1^2 = 0$, իսկ $x_2^2 > 0$, այսինքն՝ $x_1^2 < x_2^2$ կամ որ նույնն է՝ $y_1 < y_2$:

Իսկ եթե $x_1 > 0$ և $x_1 < x_2$, ապա նորից ըստ x_1 և x_2 դրական թվերի մասին անհավասարությունների հայտնի հատկության, $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է $x_1^2 < x_2^2$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $y_1 < y_2$:

4) Եթե x դրական թիվը, անսահմանափակ աճելով, ձգտում է $+\infty$, ապա նաև $y = x^2$-ն է ձգտում $+\infty$, այսինքն՝

$$y \to +\infty, \text{ եթե } x \to +\infty:$$

Իրոք, դիցուք x-ը ձգտում է $+\infty$-ի՝ ընդունելով $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ...բնական արժեքները: Այդ դեպքում $y = x^2$-ն համապատասխանաբար կընդունի $n^2 = 1, 4, 9, 16, 25$ .... արժեքները և, ակնհայտորեն, նույնպես ձգտում է $+\infty$-ի:

x-ի միջանկյալ (ոչ ամբողջ) արժեքների համար նույնպես այդ հատկությունը ճիշտ է:

5) ***x-ի նշանը փոխելով հակառակ նշանով՝ նրան համապատասխանող $y = x^2$ արտահայտության արժեքը չի փոխվում, այսինքն՝*** $y(-x) = y(x)$:

Իրոք, $(-x)^2 = x^2$ ցանկացած x իրական թվի համար:

Այսպիսի հատկությամբ օժտված ֆունկցիան անվանում են ***զույգ ֆունկցիա:***

Այսպիսով, $y = x^2$ ֆունկցիան զույգ ֆունկցիա է:

6) $y = x^2$ ***ֆունկցիան անընդհատ է,*** այսինքն՝ x-ի փոքր փոփոխմանը համապատասխանում է y-ի փոքր փոփոխություն:

Այս փաստը դրական x-երի համար դառնում է ակնհայտ, եթե համարենք, որ y-ը x կողմով քառակուսու մակերեսն է: Պարզ է, որ քառակուսու կողմի փոքր փոփոխությունը բերում է նրա մակերեսի փոքր փոփոխության:

Այս հիմնական հատկություններից, որպես հետևանք, հեշտությամբ կարելի է հիմնավորել նաև հետևյալ հատկությունները.

ա) ***եթե*** $x < 0$, ***ապա*** $y > 0$,

բ) ***եթե*** $x \to -\infty$, ***ապա*** $y \to +\infty$,

գ) $(-\infty; 0]$ միջակայքում $y = x^2$ ***ֆունկցիան նվազող է,*** այսինքն՝ x-ի մեծ արժեքին համապատասխանում է y-ի փոքր արժեք, ($x_1 < x_2 \leqslant 0$ պայմանից հետևում է, որ $x_1^2 > x_2^2$):

Ինչպես գիտենք, $y = x^2$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկն*** xOy ***կոորդինատային հարթության*** $(x; x^2)$ ***կոորդինատներով կետերի բազմությունն է, որտեղ*** x***-ը ցանկացած իրական թիվ է:***

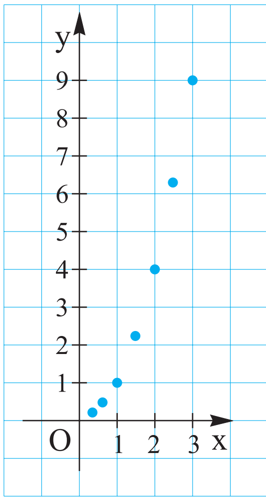
$$y = x^2 \qquad (1)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերելու համար նշենք x-ի, որքան հնարավոր է, մեծ թվով տարբեր դրական արժեքներ և ըստ (1) բանաձևի հաշվենք նրանց համապատասխանող y-ի արժեքները:

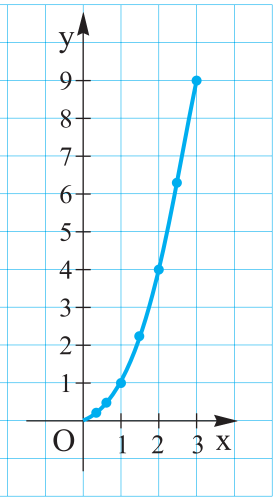
Ստորև բերված է [0; 3] միջակայքից x-ի որոշակի արժեքներին համապատասխանող աղյուսակ.

x	0	0,3	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0	0,09	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Աղյուսակի (x; y) թվազույգերին համապատասխանող կետերը նշենք տրված xOy կոորդինատային համակարգում: Կունենանք որոնելի գրաֆիկին պատկանող մի քանի կետեր (նկ. 32):



Նկ. 32



Նկ. 33

Այդ կետերը միացնենք սահուն, անընդհատ գծով (ինչպես ընդունված է ասել՝ «առանց գրիչի ծայրը թղթից կտրելու») այնպես, որ նրա ընթացիկ կետի y օրդինատը աճի աբսցիսի աճմանը զուգընթաց (նկ. 33): Ստացված անընդհատ գիծը կարելի է դիտարկել որպես $y = x^2$ ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկ x-ի փոփոխման [0; 3] միջակայքում:

Նշենք, որ նկ. 33-ում պատկերված գրաֆիկը արտացոլում է $y = x^2$ ֆունկցիայի վերը նշված 1, 2, 3, 6 հատկությունները:

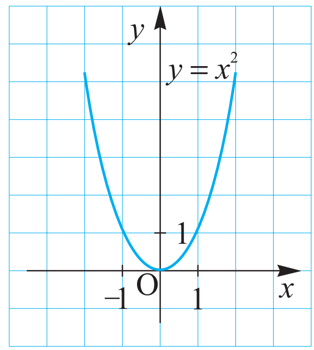
6-րդ հատկությունը ցուցանշում է այն, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պետք է իրենից ներկայացնի անընդհատ գիծ: Դրա համար էլ մենք նկ. 32-ում ստացված կետերը իրար միացրինք չընդհատվող գծով:

Հեշտ է պատկերացնել, թե ինչ տեսք ունի $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը x-ի մեծ դրական արժեքների համար: Եթե այդ գրաֆիկի կետի աբսցիսը ձգտում է $+\infty$, ապա, ըստ 4-րդ հատկության, նրա y օրդինատը նույնպես ձգտում է $+\infty$: Ընդ որում պետք է նկատի ունենալ, որ y-ը ձգտում է $+\infty$ շատ ավելի արագ, քան x-ը: Եթե, օրինակ, x-ը ընդունում է 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... արժեքները, ապա y-ը համապատասխանաբար հավասար է այդ թվերի քառակուսիներին՝ 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Ըստ 5-րդ հատկության՝ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի x և $-x$ աբսցիսներով կետերն ունեն նույն օրդինատը, որի շնորհիվ էլ $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ: Այսպիսով, Oy առանցքը $y = x^2$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության առանցքն է:***

$y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 34-ում:

$y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են ***պարաբոլ:***



Նկ. 34

Հաճախ մենք կարճ կասենք՝ «$y = x^2$ պարաբոլ»: Հետագայում մենք կիմանանք, որ $y = ax^2 + bx + c$ տեսքի ֆունկցիայի գրաֆիկը (որտեղ a, b, c-ն տված թվեր են և $a \neq 0$) նույնպես անվանում են պարաբոլ:

Պարաբոլի և նրա համաչափության առանցքի հատման կետն անվանում են պարաբոլի գագաթ: $y = x^2$ դեպքում դա O (0; 0) կետն է:

Դիտելով $y = x^2$ պարաբոլը՝ կարելի է անմիջականորեն տեսնել $y = x^2$ ֆունկցիայի մի շարք հատկություններ:

Իրոք, $y = x^2$ պարաբոլն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Դա $y = x^2$ ֆունկցիայի 1-ին հատկությունն է:

$y = x^2$ պարաբոլի բոլոր կետերը, բացի նրա գագաթից, գտնվում են x-երի առանցքից վերև: Դա 2-րդ հատկությունն է:

Եթե A(x; y) կետը պարաբոլով շարժվում է այնպես, որ նրա աբսցիսը դրական է և աճում է, ապա նրա y օրդինատը նույնպես աճում է: Դա 3-րդ հատկությունն է:

$y = x^2$ պարաբոլն անընդհատ գիծ է (6-րդ հատկություն) և համաչափ է y առանցքի նկատմամբ (5-րդ հատկություն): Բայց մենք գրաֆիկից տեսնում ենք նաև, որ եթե պարաբոլի կետերի x աբսցիսները բացասական են և աճում են, ապա նրանց y օրդինատները նվազում են, այսինքն x-ի մեծ բացասական արժեքին համապատասխանում է y-ի փոքր արժեք: Դա բխում է նաև 3 և 5 հատկություններից:

Առաջադրանքներ

462. ա) Ի՞նչ է նշանակում, որ $y = x^2$ ֆունկցիան աճող է ոչ բացասական թվերի բազմությունում:

բ) Ի՞նչ է նշանակում, որ $y = x^2$ ֆունկցիան զույգ է:

գ) Ձևակերպեք $y = x^2$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները:

463. Ցույց տվեք, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի 2-րդ և 5-րդ հատկություններից բխում է, որ $x \neq 0$ դեպքում $y < 0$:

464. Ցույց տվեք, որ $y = x^2$ ֆունկցիայի 3-րդ և 5-րդ հատկություններից բխում է, որ ոչ բացասական թվերի բազմությունում $y = x^2$ ֆունկցիան նվազող է:

465. Կազմեք $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքների աղյուսակ, եթե x-ը փոփոխվում է.

ա) 1 քայլով (մասշտաբի 1 միավորով) [0; 15] միջակայքում,

բ) 1 քայլով՝ [–15; 0] միջակայքում,

գ) 0,1 քայլով՝ [0; 1] միջակայքում,

դ) 0,1 քայլով՝ [0; 0,1] միջակայքում,

ե) 0,01 քայլով՝ [0; 0,1] միջակայքում,

զ) 0,01 քայլով՝ [–0,1; 0] միջակայքում:

466. Համեմատեք թվային արտահայտությունների արժեքները.

ա) $1{,}17^2$ և $1{,}18^2$; բ) $1{,}18^2$ և $1{,}19^2$;

գ) $2{,}31^2$ և $2{,}32^2$; դ) $2{,}71^2$ և $2{,}72^2$:

467. $y = x^2$ ֆունկցիայի համար համեմատեք y_1 և y_2-ը, եթե.

ա) $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0{,}6$; բ) $x_1 = 7{,}1$, $x_2 = 6{,}3$;

գ) $x_1 = 0{,}9$, $x_2 = 1$; դ) $x_1 = 10{,}2$, $x_2 = 9{,}8$:

468. Տրված է $y = x^2$ ֆունկցիան: Գտեք $y(x)$-ը, լուծումը գրելով հետևյալ կերպ՝ $y(-0{,}8) = (-0{,}8)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

ա) $y(-1{,}2)$, $y(0)$, $y(-2{,}5)$; բ) $y(-0{,}9)$, $y(-1{,}1)$, $y(-0{,}1)$:

469. Որոշեք $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքի նշանը՝ x-ի նշված արժեքների դեպքում.

ա) 0,2; 1,5; –3; –0,2; բ) –8,1; –100; 0,31; 100:

470. Աճո՞ղ է արդյոք $y = x^2$ ֆունկցիան $[a; b]$ միջակայքում, եթե.

ա) $a = -3$, $b = 3$; բ) $a = -1$, $b = 1$; գ) $a = 1$, $b = 4$;

դ) $a = 0$, $b = 0{,}5$; ե) $a = -2$, $b = -1$; զ) $a = -3$, $b = 0$:

471. ա) Ի՞նչն են անվանում $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

բ) Ինչպե՞ս կառուցել $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

գ) Ինչպե՞ս են անվանում $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

դ) Ի՞նչ ձևով է արտահայտվում $y = x^2$ ֆունկցիայի անընդհատության հատկությունը նրա գրաֆիկի վրա:

ե) Ո՞ր կետն են անվանում $y = x^2$ պարաբոլի գագաթ:

զ) Ո՞ր ուղիղն է $y = x^2$ պարաբոլի համաչափության առանցքը:

472. Տրված է $y = x^2$ ֆունկցիան:
ա) Հաշվեք y-ի արժեքները՝ փոփոխելով x-ի արժեքները –3-ից մինչև 3 ամբողջ թվերով: Ներկայացրեք աղյուսակի տեսքով:
բ) Կառուցեք xOy կոորդինատային համակարգ՝ մասշտաբի միավորը վերցնելով 1 սմ: Կառուցեք նախորդ կետում հաշված կոորդինատ-ներով կետերը և միացրեք կառուցված կետերը անընդհատ կորով:
գ) Ո՞ր քառորդներում է դասավորված $y = x^2$ հավասարման գրաֆիկը:

473. Լրացրեք հետևյալ աղյուսակը և կառուցեք $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.

x	0	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	$\pm 2\frac{1}{2}$	± 3	$\pm 3\frac{1}{2}$	± 4
$y = x^2$										

474. Պատկանո՞ւմ է արդյոք A(x; y) կետը $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, եթե.

ա) $x = 1,\ y = 5$; բ) $x = 3,\ y = 9$; գ) $x = 1{,}5,\ y = 2\frac{1}{4}$;

դ) $x = -2,\ y = 4$; ե) $x = 0{,}4,\ y = 1{,}6$; զ) $x = 1\frac{1}{2},\ y = 4{,}5$:

475. Տրված է $y = x^2$ ֆունկցիան: x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում.

ա) $y > 0$; բ) $y = 0$; գ) $y < 0$:

5.2. Քառակուսի արմատի հասկացությունը

Երկրաչափության մեջ երբեմն հանդիպում է այսպիսի խնդիր.
Քառակուսու մակերեսը հավասար է b-ի: Գտնել նրա կողմը:
Այս խնդիրը հետևյալ՝ ավելի ընդհանուր խնդրի մասնավոր դեպքն է.

Տրված b իրական թվի համար գտնել a իրական թիվ այնպես, որ $a^2 = b$:

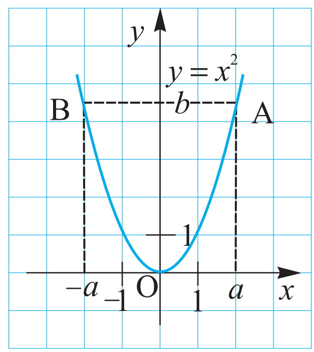
Ակնհայտ է, որ խնդիրն ունի լուծում միայն այն դեպքում, երբ b-ն ոչ բացասական թիվ է, քանի որ ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է, այլ կերպ ասած՝ գոյություն չունի իրական թիվ, որի քառակուսին հավասար լինի բացասական թվի:

Այժմ, օգտագործելով $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ցույց տանք, որ ցանկացած ոչ բացասական b թվի համար գոյություն ունի a իրական թիվ, այնպիսին, որ

$$a^2 = b:$$

$b = 0$ դեպքում մենք պետք է գտնենք այնպիսի a թիվ, որ $a^2 = 0$: Պարզ է, որ այդպիսի միակ թիվը $a = 0$-ն է:

Դիցուք՝ $b > 0$: y ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում պատկերենք $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և $y = \text{b}$ ուղիղը (որը զուգահեռ է Ox առանցքին): Այդ ուղիղը $y = x^2$ պարաբոլը հատում է A և B երկու կետերում (նկ. 35):



Նկ. 35

Դիցուք՝ A կետի աբսցիսը a-ն է: Այդ դեպքում B կետի աբսցիսը կլինի ($-a$) թիվը, քանի որ A և B կետերը համաչափ են y-ների առանցքի նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ a և ($-a$) թվերի քառակուսիները հավասար են b-ի՝

$$a^2 = (-a)^2 = b:$$

Ըստ որում՝ գոյություն չունի այլ իրական թիվ, որի քառակուսին հավասար լինի b-ի:

Քառակուսի արմատ տրված b թվից անվանում են այն թիվը, որի քառակուսին հավասար է b:

Ասվածից հետևում է, որ.

1) գոյություն ունի (և այն էլ՝ երկու) քառակուսի արմատ ցանկացած b դրական թվից: Նրանք մոդուլով իրար հավասար են և ունեն տարբեր նշաններ, այսինքն՝ արմատներից մեկը դրական է, մյուսը՝ բացասական (նկ. 35-ում a-ն b թվի քառակուսի արմատի դրական արժեքն է, իսկ $-a$-ն՝ բացասական արժեքը),

2) 0-ի քառակուսի արմատը միակն է. այն հավասար է զրոյի,
3) քառակուսի արմատ բացասական թվից գոյություն չունի:

Օրինակ 1: 17-ը և –17-ը 289-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև

$17^2 = (-17)^2 = 289$:

Օրինակ 2: $\frac{1}{7}$ և $-\frac{1}{7}$-ը $\frac{1}{49}$-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև

$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$:

Օրինակ 3: $\frac{5}{3}$ և $-\frac{5}{3}$-ը $\frac{25}{9}$-ի քառակուսի արմատներն են, որովհետև

$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$:

Օրինակ 4: 0-ն 0-ի միակ քառակուսի արմատն է:

Օրինակ 5: Գոյություն չունի –4-ից քառակուսի արմատ:

Առաջադրանքներ

476. ա) Կարո՞ղ է արդյոք իրական թվի քառակուսին լինել բացասական թիվ:
բ) Ի՞նչն են անվանում քառակուսի արմատ տված թվից:
գ) Քանի՞ քառակուսի արմատ ունի. ա) դրական թիվը, բ) զրոն:
դ) Գոյություն ունե՞ն արդյոք իրական թվեր, որոնք բացասական թվի քառակուսի արմատ են:

477. Գտեք քառակուսու կողմը, եթե նրա մակերեսը հավասար է.
ա) 25 սմ^2; բ) 1 մ^2; գ) 400 մմ^2;
դ) 49 դմ^2; ե) 16 կմ^2; զ) 1 հա:

478. $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ ցույց տվեք, որ.
ա) գոյություն ունեն երկու իրական թվեր, որոնք հանդիսանում են 3 թվի քառակուսի արմատներ,

բ) գոյություն ունի միակ քառակուսի արմատ 0 թվից,

գ) գոյություն չունի –5-ից քառակուսի արմատ:

479. Գոյություն ունի՞ թիվ, որի քառակուսին հավասար լինի տրված թվին: Եթե այո, նշեք այդ թվերը.

ա) 4; բ) 100; գ) –6; դ) 81;

ե) –0,25; զ) 0; է) 0,09; ը) 1,21:

480. Ապացուցեք, որ.

ա) 11-ը 121-ի քառակուսի արմատ է,

բ) –13-ը 169-ի քառակուսի արմատ է,

գ) 1,7-ը 2,39-ի քառակուսի արմատ չէ,

դ) –0,7-ը –0,49-ի քառակուսի արմատ չէ:

481. Գտեք տված թվերի քառակուսի արմատները.

ա) 10 000; բ) 3600; գ) 640 000; դ) 1 000 000;

ե) $\frac{1}{4}$; զ) $\frac{1}{9}$; է) $\frac{25}{36}$; ը) $\frac{16}{49}$:

Ապացուցեք լուծման ստույգությունը:

482. Ստուգեք՝ արդյոք.

ա) 42-ը 1764-ի քառակուսի արմա՞տ է,

բ) –19-ը 361-ի քառակուսի արմա՞տ է:

5.3. Թվաբանական քառակուսի արմատ

Տված ոչ բացասական b թվից թվաբանական քառակուսի արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական թիվը, որի քառակուսին հավասար է b-ի:

Այդ թիվը նշանակում են $\sqrt{b}$-ով և կարդում՝ «թվաբանական քառակուսի արմատ b թվից»:

Հաշվենք մի քանի թվաբանական քառակուսի արմատներ.

$\sqrt{0}=0,\quad \sqrt{1}=1,\quad \sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,\quad \sqrt{16}=4,$

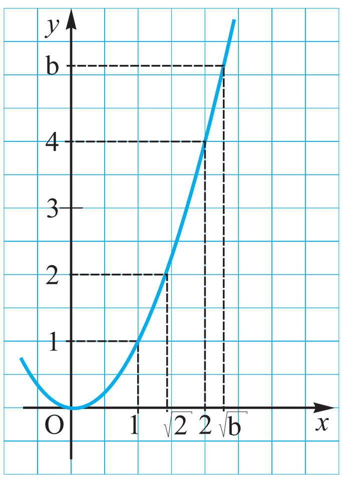
$$\sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}, \qquad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}:$$

Ընդգծենք, որ թվաբանական քառակուսի արմատը զրոյից հավասար է զրոյի, իսկ թվաբանական քառակուսի արմատը դրական թվից դրական թիվ է:

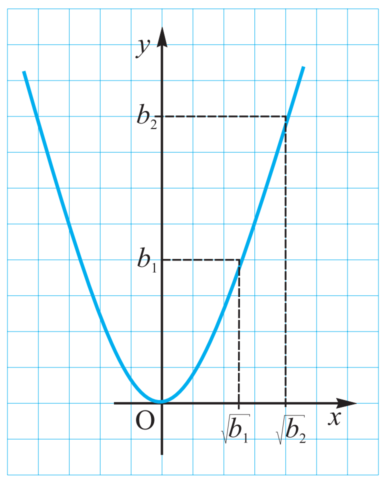
Երբեմն «թվաբանական քառակուսի արմատ թվից» բառերի փոխարեն ասում են «թվից քառակուսի արմատի թվաբանական արժեք» կամ «երկրորդ աստիճանի թվաբանական արմատ թվից»:

Հաճախ $\sqrt{b}$ արտահայտությունը $b \geqslant 0$ դեպքում մենք ուղղակի կանվանենք քառակուսի արմատ b-ից, կարճության համար բաց թողնելով «թվաբանական» ածականը: b դրական թվի քառակուսի արմատներից մեկը թվաբանականն է և հավասար է $\sqrt{b}$-ի, իսկ մյուսը հավասար է $-\sqrt{b}$:

Նշանակում է՝ ***յուրաքանչյուր ոչ բացասական*** b ***թվի համար գոյություն ունի միակ թվաբանական քառակուսի արմատ:***



Նկ. 36



Նկ. 37

Նկ. 36-ում Ox առանցքի վրա 0-ն 0 թվի քառակուսի արմատն է, 1-ը՝ 1-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, $\sqrt{2}$-ը՝ 2-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, 2-ը՝ 4-ի թվաբանական քառակուսի արմատը, $\sqrt{b}$-ն՝ b դրական թվի քառակուսի արմատը: Ինչպես երևում է նկ. 37-ից, եթե b_1 և b_2 ոչ բացասական թվերի այնպիսիք են, որ $b_1 < b_2$, ապա $\sqrt{b_1} < \sqrt{b_2}$: Այլ կերպ ասած, ***երկու ոչ բացասական թվերից մեկին համապատասխանում է ավելի մեծ քառակուսի արմատ:***

Առաջադրանքներ

483. ա) Ի՞նչն են անվանում տրված թվից թվաբանական քառակուսի արմատ:
բ) Տրված թվից քանի՞ թվաբանական քառակուսի արմատ գոյություն ունի:
գ) Կարո՞ղ են արդյոք տարբեր թվերի թվաբանական քառակուսի արմատներն իրար հավասար լինել:
դ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, եթե $b \geqslant 0$:

484. Գտեք թվաբանական քառակուսի արմատը.[1]

ա) $\sqrt{9}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{144}$;

բ) $\sqrt{0,49}$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,0016}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{1}{81}}$, $\sqrt{\frac{1}{1600}}$:

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (485-487).

485. ա) $2 + \sqrt{1}$; բ) $15 - \sqrt{36}$; գ) $\sqrt{9} + \sqrt{4}$;
դ) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$; ե) $\sqrt{49} - \sqrt{1}$; զ) $\sqrt{81} - \sqrt{49}$;
է) $\sqrt{100} - \sqrt{36}$; ը) $\sqrt{144} - \sqrt{121}$; թ) $\sqrt{0,36} + \sqrt{0,49}$:

486. ա) $2 \cdot \sqrt{81}$; բ) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{100}$; գ) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{0,25}$;
դ) $\sqrt{0,16} \cdot \sqrt{9}$; ե) $\sqrt{0,27} : \sqrt{3}$; զ) $\sqrt{49} : \sqrt{0,01}$;
է) $\sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{81}$; ը) $\sqrt{0,36} : \sqrt{\frac{1}{36}}$; թ) $\sqrt{1,69} : \sqrt{0,0625}$:

487. ա) $5 \cdot \sqrt{4} \cdot 3$; բ) $2\sqrt{9} + 3\sqrt{16}$; գ) $\sqrt{13 - 3 \cdot 3}$;
դ) $\sqrt{7^2 - 26 : 2}$; ե) $\frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 22 : 2}$; զ) $3\sqrt{0,64} - 5\sqrt{1,21}$:

488. Իմաստ ունի՞ արտահայտությունը.
ա) $-\sqrt{25}$; բ) $\sqrt{-25}$; գ) $\sqrt{0}$; դ) $\sqrt{1,21}$:

489. Գտեք (եթե հնարավոր է) թիվ, որի թվաբանական քառակուսի արմատը հավասար է.

ա) 7; բ) 0,2; գ) –2; դ) –100:

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (490, 491).

490. ա) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; բ) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; գ) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; դ) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$:

491. ա) $\sqrt{900}$, $\sqrt{6400}$, $\sqrt{810000}$, $\sqrt{250000}$, $\sqrt{16000000}$;

բ) $\sqrt{0,64}$, $\sqrt{0,0064}$, $\sqrt{0,0009}$, $\sqrt{0,000016}$, $\sqrt{0,000004}$;

գ) $\sqrt{256}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{289}$, $\sqrt{361}$:

492. Ապացուցեք, որ.

ա) $\sqrt{4} > 1$; բ) $\sqrt{3} > 1$; գ) $2 < \sqrt{5}$;
դ) $1,4 < \sqrt{2}$; ե) $1,7 < \sqrt{3}$; զ) $1,8 > \sqrt{3}$;
է) $1 < \sqrt{2} < 2$; ը) $1 < \sqrt{3} < 2$:

493. Համեմատեք թվերը.

ա) $\sqrt{100}$ և $\sqrt{81}$; բ) $\sqrt{100}$ և $\sqrt{121}$; գ) $\sqrt{4}$ և 3;

դ) $\frac{1}{5}$ և $\sqrt{0,25}$; ե) 2 և $\sqrt{\frac{1}{16}}$; զ) $\frac{9}{5}$ և $\sqrt{\frac{4}{49}}$;

է) $\sqrt{0,09}$ և $\sqrt{\frac{4}{25}}$; ը) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ և $\sqrt{\frac{64}{49}}$; թ) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ և $\frac{1}{4}$:

494. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; բ) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; գ) $\left(\sqrt{13}\right)^2$; դ) $\left(\sqrt{17}\right)^2$:

495. Գտեք իրար հաջորդող երկու բնական թվեր, որոնց միջև է գտնվում տրված թիվը.

ա) $\sqrt{13}$; բ) $\sqrt{17}$; գ) $\sqrt{23}$; դ) $\sqrt{39}$:

5.4.* Քառակուսի արմատ բնական թվից

Բնական թվի քառակուսին բնական թիվ է: Բայց ոչ բոլոր բնական թվերն են որևէ բնական թվի քառակուսի:

Առաջին 20 բնական թվերի մեջ միայն չորս թիվ կա, որոնք բնական թվի քառակուսի են. դրանք են՝ 1, 4, 9 և 16-ը: Առաջին 1000 բնական թվերի մեջ կա միայն 31 հատ թիվ, որոնք հանդիսանում են բնական թվի քառակուսի, այսինքն՝ այդ թվերի քանակի մոտ 3%-ը:

Ահա դրանք են՝

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961:

Իսկ եթե դիտարկենք 10000-ից ոչ մեծ բնական թվերը, ապա նրանց մեջ կան ընդամենը 100 այսպիսի թվեր, այսինքն նրանց 1%-ն են կազմում բնական թվերի քառակուսիները՝

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 100^2:$$

Եթե այս թվերից քառակուսի թվաբանական արմատ հանենք, ապա համապատասխանաբար կստացվեն

$$1, 2, 3, \ldots, 100$$

թվերը:

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ մեծ բնական թվերի մեջ «ավելի ուշ» են հանդիպում բնական թվի քառակուսի հանդիսացող թվերը:

Թեորեմ: ***Եթե բնական թիվը որևէ բնական թվի քառակուսի չէ, ապա այն իռացիոնալ թվի քառակուսի է:***

Ապացուցում. Դիցուք՝ n-ը բնական թվի քառակուսի չհանդիսացող բնական թիվ է: Ենթադրենք $\sqrt{n}$-ը ռացիոնալ թիվ է, այսինքն՝

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}, \tag{1}$$

որտեղ p-ն և q-ն բնական թվեր են:

Կարող ենք համարել, որ այդ կոտորակն անկրճատելի է, այլապես նախապես մենք դա կկրճատեինք: Ըստ քառակուսի արմատի սահմանման՝ (1) հավասարությունից կստանանք՝

$$n = \frac{p^2}{q^2}: \tag{2}$$

Նկատենք, որ $q \neq 1$, հակառակ դեպքում կստանանք՝ $n = p^2$, այսինքն՝ n-ը բնական թվի քառակուսի է, որը հակասում է թեորեմի պայմանին: Իսկ եթե

---

[1] Այս և հաջորդ վարժությունները կատարելիս հարմար է օգտվել քառակուսիների աղյուսակից:

$q > 1$, ապա (2) հավասարության ձախ մասը բնական թիվ է, իսկ աջ մասը՝ անկրճատելի կոտորակ, որը հնարավոր չէ (⌈պետք է նկատի ունենալ, որ եթե p և q բնական թվերը 1-ից մեծ ընդհանուր բաժանարար չունեն, ապա ակնհայտ է, որ p^2-ն և q^2-ն նույնպես ընդհանուր բաժանարար չունեն):⌋

Հետևաբար, մեր ենթադրությունը սխալ էր, այսինքն՝ $\sqrt{n}$-ը իռացիոնալ թիվ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ՝ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ թվերն իռացիոնալ են:

Առաջադրանքներ

496. Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել.

ա) պարզ թվի քառակուսի արմատը,

բ) բնական թվի քառակուսի արմատը:

497. ա) Գրեք 150-ից փոքր այն բնական թվերը, որոնք բնական թվի քառակուսի են:

բ) 150-ից մինչև 200 բնական թվերի մեջ կա՞ արդյոք բնական թվի քառակուսի:

498. Տրված թիվը հանդիսանո՞ւմ է արդյոք բնական թվի քառակուսի.

ա) 7; բ) 27; գ) 0; դ) –5;

ե) $\frac{9}{4}$; զ) 100; է) –16; ը) 49:

499. Ապացուցեք, որ գոյություն չունի ռացիոնալ թիվ, որի քառակուսին հավասար է.

ա) 5; բ) 7; գ) $\frac{1}{2}$; դ) $\frac{1}{3}$:

500. Ապացուցեք հետևյալ թվերի իռացիոնալությունը.

ա) $\sqrt{3}$; բ) $\sqrt{5}$; գ) $\sqrt{7}$; դ) $\sqrt{11}$;

ե) $\sqrt{6}$; զ) $\sqrt{8}$; է) $\sqrt{10}$; ը) $\sqrt{12}$:

501. Թիվը ռացիոնա՞լ է, թե՞ իռացիոնալ.

ա) $\sqrt{4}$; բ) $\sqrt{13}$; գ) $\sqrt{16}$; դ) $\sqrt{17}$;

ե) $\sqrt{9}$; զ) $\sqrt{20}$; է) $\sqrt{25}$; ը) $\sqrt{0}$:

Ապացուցեք, որ տված արտահայտության արժեքը ռացիոնալ թիվ է (502, 503).

502. ա) $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$; բ) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$;

գ) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; դ) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$:

503. ա) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-1\right)^2$; բ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;

գ) $\left(\sqrt{7}-1\right)^2+\left(\sqrt{7}+1\right)^2$; դ) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$;

ե) $\left(\sqrt{7}-2\right)^2+4\sqrt{7}$; զ) $\left(\sqrt{8}+3\right)^2-6\sqrt{8}$:

504. Ապացուցեք, որ ցանկացած $a \geqslant 0$ թվի համար տեղի ունի

$$\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)=1$$

հավասարությունը:

5.5. Թվաբանական քառակուսի արմատների հատկությունները

Թեորեմ. ***Դիցուք*** a***-ն և*** b***-ն ցանկացած ոչ բացասական թվեր են, իսկ*** c***-ն՝ դրական թիվ: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ հավասարությունները՝***

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \tag{1}$$

$$\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}: \tag{2}$$

Ցանկացած a ***իրական թվի համար ճիշտ է***

$$\sqrt{a^2}=|a| \tag{3}$$

հավասարությունը:

Ապացուցում: (1) հավասարության ձախ և աջ մասերը ոչ բացասական թվեր են, և նրանց քառակուսիները հավասար են միևնույն ab թվին՝

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab,$$

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab:$$

Բայց այդ դեպքում, ինչպես մենք գիտենք կետ 3.2-ից, հավասար են նաև այդ թվերը:

Նույն ձևով ապացուցվում է(2) հավասարությունը: Նրա ձախ և աջ մասերն առանձին-առանձին բարձրացնենք քառակուսի՝

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = \frac{a}{c},$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a}{c}:$$

Քանի որ $\sqrt{\frac{a}{c}}$ և $\sqrt{\frac{a}{c}}$ թվերի քառակուսիներն իրար հավասար են, ուստի (2) հավասարության ձախ մասը հավասար է աջ մասին:

Ցանկացած իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական է, ուստի (3) հավասարության ձախ մասում գրված է թվաբանական արմատ ոչ բացասական թվից:

Ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման՝ $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$:

Ցույց տանք, որ $|a|^2 = a^2$: Իրոք, եթե $a \geqslant 0$, ապա $|a| = a$ և դրա համար էլ $|a|^2 = a^2$: Եթե $a < 0$, ապա $|a| = -a$, հետևաբար $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$:

Այսպիսով, ապացուցեցինք, որ (3) հավասարության ձախ մասի քառակուսին հավասար է նրա աջ մասի քառակուսուն: Քանի որ այդ երկու թվերն էլ ոչ բացասական են, ուստի իրար հավասար են:

Թեորեմն ապացուցված է:

Նշենք, որ (1) հավասարությունը նշանակում է, որ ***ոչ բացասական երկու թվերի արտադրյալի արմատը հավասար է այդ թվերի արմատների արտադրյալին:*** (2) հավասարությունը նշանակում է, որ ***ոչ բացասական թվի և դրական թվի քանորդի արմատը հավասար է այդ թվերի արմատների քանորդին:***

Դիտողություն: (1) հավասարությունը կարելի է ընդհանրացնել ոչ բացասական թվերի ցանկացած քանակի դեպքում՝

$$\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_n}:$$

Ապացուցումը՝ ինչպես n = 2 դեպքում:

Նկատենք, որ ձևակերպումներում սեղմության համար մենք «թվաբանական քառակուսի արմատ» բառերի փոխարեն ուղղակի նշեցինք «արմատ»:

(1), (2) և (3) հավասարությունները օգնում են պարզեցնել քառակուսի արմատներ պարունակող արտահայտությունները:

Օրինակ 1. $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$:

Օրինակ 2. $\sqrt{\frac{27}{25}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{\frac{3}{1}} = \frac{3}{5}\sqrt{3}$

Օրինակ 3. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{16^2} = 16$:x

Օրինակ 4. $\left(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}\right) =$

$$= \left(2\sqrt{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\sqrt{36} + \sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) =$$
$$= \left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) =$$
$$= \left(3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) = 6\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) =$$
$$= 6\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 6(5 - 2) = 18:$$

$\sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ ձևափոխությունն անվանում են ***արտադրիչն արմատանշանի տակից դուրս բերում***, իսկ հակադարձ ձևափոխությունը՝ $4\sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5}$, անվանում են ***արտադրիչը արմատանշանի տակ տանել:***

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ձևափոխությունն անվանում են ***հայտարարն արմատանշանից ազատել կամ հայտարարն իռացիոնալությունից ազատել:***

Առաջադրանքներ

505. ա) Ինչի՞ է հավասար ոչ բացասական թվերի արտադրյալի քառակուսի արմատը:

բ) Ինչի՞ է հավասար $\sqrt{a^2}$-ն a դրական թվի համար:

գ) Ինչի՞ է հավասար դրական թվերի քանորդի քառակուսի արմատը:

506. Հաշվեք.

ա) $\sqrt{4^2}$; բ) $\sqrt{3{,}1^2}$; գ) $\sqrt{(-1)^2}$; դ) $\sqrt{(-5)^2}$;
ե) $\sqrt{1{,}13^2}$; զ) $\sqrt{(-7{,}2)^2}$; է) $\sqrt{(-0{,}3)^2}$; ը) $\sqrt{(-57{,}1)^2}$:

517. x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է հավասարությունը ճիշտ.[1]

ա) $\sqrt{x^2} = x$; բ) $\sqrt{x^2} = |x|$; գ) $\sqrt{x^2} = -x$; դ) $\sqrt{x^2} = 0$:

508. Պարզեցրեք արտահայտությունը նշված պայմանով.

ա) $\sqrt{a^2}$, եթե $a \geqslant 0$;
բ) $\sqrt{b^2}$, եթե $b < 0$;
գ) $\sqrt{m^2}$, եթե $m = 0$;
դ) $\sqrt{n^2}$, եթե $n < 0$;
ե) $\sqrt{(x+1)^2}$, եթե $x + 1 > 0$;
զ) $\sqrt{(m-2)^2}$, եթե $m - 2 \geqslant 0$;
է) $\sqrt{(3a+1)^2}$, եթե $3a + 1 \geqslant 0$;
ը) $\sqrt{(p-4)^2}$, եթե $p - 4 < 0$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (509-511).

509. ա) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; բ) $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$; գ) $\sqrt{\left(1\frac{1}{5}\right)^2}$; դ) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$:

❖ **510.** ա) $\sqrt{2^4}$; բ) $\sqrt{3^4}$; գ) $\sqrt{2^6}$; դ) $\sqrt{3^6}$;
ե) $\sqrt{(-2)^8}$; զ) $\sqrt{(-3)^8}$; է) $\sqrt{a^4}$; ը) $\sqrt{m^6}$:

❖ **511.** ա) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; բ) $\sqrt{a^2 + 2a + 1}$;
գ) $\sqrt{1 - 2m + m^2}$; դ) $\sqrt{4 - 4p + p^2}$;
ե) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$; զ) $\sqrt{9 - 6p^2 + q^4}$;
է) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$; ը) $\sqrt{25 + 30a + 9a^2}$:

512. Գտեք արտահայտության արժեքը.
ա) $\sqrt{4 \cdot 9}$; բ) $\sqrt{9 \cdot 16}$; գ) $\sqrt{16 \cdot 25}$;
դ) $\sqrt{25 \cdot 49}$; ե) $\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 9}$; զ) $\sqrt{49 \cdot 64 \cdot 100}$:

Արտադրիչը հանեք արմատանշանի տակից (513-515).
Օրինակ՝ $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$:

513. ա) $\sqrt{12}$; բ) $\sqrt{18}$; գ) $\sqrt{20}$; դ) $\sqrt{24}$; ե) $\sqrt{27}$;
զ) $\sqrt{28}$; է) $\sqrt{32}$; ը) $\sqrt{45}$; թ) $\sqrt{50}$; ժ) $\sqrt{72}$:

514. ա) $\sqrt{108}$; բ) $\sqrt{147}$; գ) $\sqrt{162}$; դ) $\sqrt{245}$;
ե) $\sqrt{275}$; զ) $\sqrt{363}$; է) $\sqrt{396}$; ը) $\sqrt{576}$;
թ) $\sqrt{676}$; ժ) $\sqrt{972}$; ի) $\sqrt{54756}$; լ) $\sqrt{831744}$:

---

[1] Այսուհետև միշտ տառերով նշանակելու ենք թվերը: Հիշեցնենք, որ արմատանշանի տակ գտնվող թվերը ոչ բացասական են, իսկ կտորակների հայտարարները զրո չեն դառնում:

Ցուցում: Որոշ դեպքերում օգտակար է արմատատակ արտահայտությունը վերլուծել պարզ արտադրիչների և առանձնացնել այդ արտադրիչների քառակուսիները, եթե այդպիսիք կան:

Օրինակ՝ $\sqrt{2160} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 12\sqrt{15}$:

515. ա) $\sqrt{a^4}$; բ) $\sqrt{x^3}$; գ) $\sqrt{m^5}$;
դ) $\sqrt{p^7}$; ե) $\sqrt{a^2b^2}$; զ) $\sqrt{m^2 \cdot 4n^2}$;
է) $\sqrt{x^4y^2}$; ը) $\sqrt{9p^2q^4}$; թ) $\sqrt{25a^6b^2}$;
ժ) $\sqrt{16xy^3}$; ի) $\sqrt{49pq^2a^5}$; լ) $\sqrt{121m^4n^3k^2}$:

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (516, 517).

516. ա) $\sqrt{8 \cdot 50}$; բ) $\sqrt{27 \cdot 12}$; գ) $\sqrt{18 \cdot 50}$;
դ) $\sqrt{32 \cdot 72}$; ե) $\sqrt{40 \cdot 55 \cdot 22}$; զ) $\sqrt{21 \cdot 35 \cdot 15}$;
է) $\sqrt{6 \cdot 30 \cdot 245}$; ը) $\sqrt{245 \cdot 27 \cdot 60}$; թ) $\sqrt{242 \cdot 98}$:

517. ա) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}$; բ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; գ) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}$;
դ) $\sqrt{98} \cdot \sqrt{50}$; ե) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}$; զ) $\sqrt{27000} \cdot \sqrt{30}$;
է) $\sqrt{640} \cdot \sqrt{1000}$; ը) $\sqrt{25000} \cdot \sqrt{1000}$:

518. Արտադրիչը տարեք արմատանշանի տակ.

ա) $2\sqrt{2}$; բ) $-3\sqrt{2}$; գ) $4\sqrt{5}$;
դ) $-10\sqrt{5}$; ե) $a\sqrt{4}$, $a \geqslant 0$; զ) $mn\sqrt{5}$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
է) $2x\sqrt{6}$, $x \leqslant 0$; ը) $3pq\sqrt{2}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$; թ) $x^2\sqrt{3}$;
ժ) $a^3\sqrt{7}$, $a \geqslant 0$; ի) $m^2n\sqrt{4}$, $n \leqslant 0$; լ) $5c^2d^3\sqrt{2}$, $d \geqslant 0$:

❖ **519.** Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; բ) $\sqrt{\frac{3}{16}}$; գ) $\sqrt{\frac{40}{81}}$; դ) $\sqrt{\frac{72}{25}}$;

ե) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; զ) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$; է) $\sqrt{\frac{x^3}{9}}$; ը) $\sqrt{\frac{7a}{16b^2}}$;

բ) $\sqrt{\dfrac{3m^3n^2}{4a^2b}}$;   ժ) $\sqrt{\dfrac{25x^2y^3}{mn^7}}$;   ի) $\sqrt{\dfrac{0,1\,x}{10y^2}}$;   լ) $\sqrt{\dfrac{5m^3}{0,5n}}$:

520. Գտեք արժեքը.

ա) $\sqrt{\dfrac{49}{81}}$; բ) $\sqrt{\dfrac{64}{100}}$; գ) $\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$; դ) $\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$; ե) $\sqrt{\dfrac{169}{841}}$:

❖ **521.** Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; բ) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; գ) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; դ) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$; ե) $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$:

զ) $\sqrt{\dfrac{8}{12}}$; է) $\sqrt{\dfrac{1}{6a}}$; ը) $\sqrt{\dfrac{1}{3x}}$; թ) $\sqrt{\dfrac{a}{m}}$; ժ) $\sqrt{\dfrac{n}{p}}$:

522. Արտահայտությունը ձևափոխեք այնպես, որ արմատանշանի տակ լինի ամբողջ թիվ.

ա) $\sqrt{3\dfrac{1}{3}}$; բ) $\sqrt{1\dfrac{5}{6}}$; գ) $\sqrt{2\dfrac{1}{5}}$; դ) $\sqrt{2\dfrac{1}{3}}$; ե) $\sqrt{8\dfrac{1}{3}}$:

(Օրինակ՝ $\sqrt{2\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$):

523. Իմանալով, որ $\sqrt{6}\approx 2,449$, հաշվեք տրված թվի մոտավոր արժեքը.

ա) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; բ) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; գ) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$; դ) $\sqrt{\dfrac{2}{27}}$;

524. Հայտարարն ազատեք արմատանշանից.

ա) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$; բ) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; գ) $\dfrac{\sqrt{7x}}{\sqrt{7}}$; դ) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x}}$:

525. Համեմատեք թվերը.

ա) $3\sqrt{2}$ և $2\sqrt{3}$; բ) $10\sqrt{20}$ և $20\sqrt{10}$; գ) $3\sqrt{0,5}$ և $2\sqrt{0,5}$;
դ) $5\sqrt{0,3}$ և $7\sqrt{0,3}$; ե) $3\sqrt{10}$ և $4\sqrt{6}$; զ) $6\sqrt{3}$ և $5\sqrt{4}$:

526. Թվերը դասավորեք աճման կարգով.

ա) $\sqrt{32}$, $\sqrt{30}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{2}\sqrt{72}$;

բ) $0{,}2\sqrt{48}$, $0{,}9\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{3}$:

527. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; բ) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; գ) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$; դ) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{96}{5}}$:

528. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;
բ) $2\sqrt{8}-3\sqrt{2}$;
գ) $\sqrt{a}-5\sqrt{a}$;
դ) $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$;
ե) $\left(3\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}-2\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
զ) $\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20}\right)\cdot3\sqrt{2}$;
է) $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$;
ը) $\left(\sqrt{12}-1\right)\left(\sqrt{12}+1\right)$;
թ) $\left(7-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+7\right)$;
ժ) $\left(\sqrt{20}-3\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$:

529. Վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $\sqrt{x}+x$; բ) $a-\sqrt{a}$; գ) $a\sqrt{3}-b\sqrt{3}$;
դ) $3\sqrt{a}-3\sqrt{b}$; ե) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$; զ) $m\sqrt{n}+n\sqrt{m}$;
է)* $\sqrt{a^3}+2a$; ը)* $3mn-\sqrt{m^3n^2}$; թ)* $xy-\sqrt{x^2y}$:

530. Օգտագործելով քառակուսի արմատների աղյուսակը, հաշվեք.

ա) $\sqrt{2}$; բ) $\sqrt{5}$; գ) $\sqrt{13}$; դ) $\sqrt{72}$;
ե) $\sqrt{97}$; զ) $\sqrt{1{,}2}$; է) $\sqrt{2{,}8}$; ը) $\sqrt{5{,}1}$;
թ) $\sqrt{12{,}3}$; ժ) $\sqrt{43{,}1}$; ի) $\sqrt{841}$; լ) $\sqrt{784}$:
խ) $\sqrt{1225}$; ծ) $\sqrt{1849}$; կ) $\sqrt{3249}$; հ) $\sqrt{431}$:

531. Ստուգեք անհավասարության ճշտությունը.

ա) $6{,}0<\sqrt{37}<6{,}1$; բ) $4{,}3<\sqrt{19}<4{,}4$;
գ) $11{,}0<\sqrt{123}<11{,}1$; դ) $21{,}3<\sqrt{456}<21{,}4$:

532. Ո՞ր թիվն է $\sqrt{11}$-ի ավելի ճշգրիտ մոտավորությունը.
ա) 3 թե՞ 4;   բ) 3,3 թե՞ 3,4;
գ) 3,31 թե՞ 3,32;   դ) 3,316 թե՞ 3,317:

533. Կրճատեք կոտորակը.
ա) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{10}$;   բ) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$;   գ) $\dfrac{\sqrt{5}+5}{5}$;
դ) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$;   ե) $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$;   զ) $\dfrac{m-\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}$:

534. Բարձրացրեք աստիճան.
ա) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$;   բ) $\left(a-b\sqrt{x}\right)^2$;   գ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;
դ) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$;   ե) $\left(1+3\sqrt{2}\right)^2$;   զ) $\left(-1+4\sqrt{3}\right)^2$:

❖ **535.** Հայտարարն ազատեք իռացիոնալությունից.
ա) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$;   բ) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$;   գ) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$;
դ) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$;   ե) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;   զ) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$:

Պատմական ակնարկ

Դեռևս Բաբելոնի գիտնականները (մոտ 4000 տարի առաջ) կարողանում էին գտնել ցանկացած բնական թվի քառակուսի արմատի մոտավոր արժեքը: Բաբելոնում կիրառվող կանոնն այսպիսին էր. c բնական թվի քառակուսի արմատը հաշվելու համար այն ներկայացնում են a^2+b տեսքով (a-ն այն ամենամեծ բնական թիվն է, որի համար $a^2<c$) և այդ դեպքում c-ի քառակուսի արմատը մոտավորապես հաշվում են

$$\sqrt{c}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$$

բանաձևով: Օրինակ՝

$$\sqrt{1620}=\sqrt{40^2+20}\approx 40+\frac{20}{2\cdot 40}=40+\frac{1}{4}=40{,}25:$$

Հույներին հայտնի էր բնական թվից մոտավոր քառակուսի արմատ հանելու բաբելացիների մեթոդը: Օրինակ, Հերոն Ալեքսանդրացու մոտ գրված է՝

$$\sqrt{160} = \sqrt{144 + 16} \approx 12 + \frac{16}{2 \cdot 12} = 12\frac{2}{3}:$$

Գոյություն ունի նաև բնական թվի քառակուսի հանդիսացող թվից ճշգրիտ քառակուսի արմատ հանելու եղանակ: Այն Ռուսաստանում հայտնի էր դեռ Լ.Ֆ. Մագնիցկու ժամանակներից: Մանրամասն գրենք քառակուսի արմատ հանելու այդ եղանակը մի օրինակով.

$\sqrt{6'55'36} = 256$

-4

$45\ 255$

$5\ 225$

$506\ 3036$

$6\ 3036$

0

Տրված թվի թվանշանները բաժանում ենք զույգերի՝ հաշված վերջից (ընդ որում վերջին «զույգը» կարող է պարունակել մեկ թվանշան, ինչպես քննարկվող օրինակում է): 6-ից պակասորդով հանելով քառակուսի արմատ՝ կստանանք 2: 2-ը բարձրացնենք քառակուսի և հանենք 6-ից և իջեցնենք հաջորդ զույգը՝ 55-ը: 255-ից ձախ գրենք առաջին արդյունքի կրկնակին՝ 4-ը, և նրան կցագրենք այնպիսի ամենամեծ թվանշան, որ ստացված թիվը այդ թվանշանով բազմապատկելով, ստացվի 255-ից փոքր կամ հավասար թիվ: Դա 5-ն է, քանի որ $45 \cdot 5 = 225 < 255$, իսկ $46 \cdot 6 = 276 > 255$: Այսպիսով, քառակուսի արմատի արժեքի երկրորդ թվանշանը 5-ն է: Հաշվենք $255 - 225 = 30$ տարբերությունը և իջեցնենք հաջորդ զույգը՝ 36-ը: 3036 թվից ձախ գրենք արդյունքի կրկնակին՝ 50-ը, և նրան կցագրենք (աջից) այնպիսի թվանշան, որ ստացված թիվը այդ թվանշանով բազմապատկելով՝ ստացվի 3036-ից փոքր կամ հավասար թիվ: Դա 6-ն է, քանի որ $506 \cdot 6 = 3036$: Ուստի արդյունքի երրորդ թվանշանը 6-ն է:

Պատ.՝ $\sqrt{65536} = 256$:

5.6. Քառակուսի արմատ պարունակող պարզագույն հավասարումներ և անհավասարումներ

Ա. *Պարզագույն իռացիոնալ հավասարումների լուծումը*

Նախ վերհիշենք մեկ անհայտով հավասարումների հետ առնչվող հիմնական գաղափարները:

1. x անհայտով հավասարման լուծում (կամ արմատ) կոչվում է այն թիվը, որը տեղադրելով այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն՝ ստանում ենք թվային ճիշտ հավասարություն:
2. Լուծել հավասարումը նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր արմատները կամ ցույց տալ, որ արմատ չունի:

3. x անհայտ պարունակող երկու հավասարումներ կոչվում են համարժեք, եթե առաջին հավասարման ցանկացած արմատ երկրորդի արմատ է, իսկ երկրորդ հավասարման ցանկացած արմատ առաջինի արմատ է, այսինքն նրանց լուծումների բազմությունները համընկնում են: (Մասնավորապես երկու հավասարումներ համարժեք են, եթե երկուսն էլ լուծում չունեն):

Մի հավասարման փոխարինումը իրեն համարժեք հավասարումով անվանում են ***հավասարման համարժեք ձևափոխություն:***

Եթե հավասարման լուծման ընթացքում կատարված է հավասարման համարժեք ձևափոխություն, ապա ձևափոխված հավասարման արմատների բազմությունը համընկնում է սկզբնական հավասարման արմատների բազմությանը:

Թվարկենք հավասարումների հիմնական համարժեք ձևափոխությունները՝

ա) հավասարման որևէ անդամի տեղափոխություն (հակադիր նշանով) հավասարման մի մասից մյուսը:

բ) հավասարման երկու մասերի բազմապատկում զրոյից տարբեր թվով (կամ բաժանում զրոյից տարբեր թվի վրա):

գ) նույնությունների, այսինքն կամայական $x \in$ R-ի համար ճշմարիտ հավասարությունների կիրառություն:

Նշենք, որ ա)-գ) ձևափոխությունների կիրառման ընթացքում հաճախ չեն գրում, որ ստացվել է սկզբնականին համարժեք հավասարում, այլ գրում են «գրենք սկզբնական հավասարումը... տեսքով»:

Հաշվի առնելով վերը ասվածը՝ քննարկենք հավասարումներ, որոնց մեջ անհայտը գտնվում է արմատանշանի տակ: Այդպիսի հավասարումներն անվանում են ***իռացիոնալ հավասարումներ:***

Պարզագույն իռացիոնալ հավասարումն ունի

$$\sqrt{x} = a \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանումից հետևում է, որ $a < 0$ դեպքում (1) հավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա հաշվի առնելով քառակուսի արմատի այն հատկությունը, որ յուրաքանչյուր ոչ բացասական թիվ հանդիսանում է միակ ոչ բացասական թվի քառակուսի արմատ, ստանում ենք, որ (1) հավասարումն ունի ***միակ*** $x = a^2$ լուծումը, քանի որ ըստ քառակուսի արմատի հատկության, $a \geqslant 0$ դեպքում $\sqrt{a^2} = a$:

Փաստորեն կարելի է ասել նաև, որ (1) հավասարումը $a \geqslant 0$ դեպքում լուծելու համար նրա երկու մասերը պետք է բարձրացնել քառակուսի: Այսպես,

$$\sqrt{2x+1} = 3$$

հավասարումը լուծելու համար նրա երկու մասերը բարձրացնում ենք քառակուսի՝

$$2x + 1 = 9$$

և ստանում, որ այդ հավասարումն ունի $x = 4$ ***միակ*** արմատը:

Հետագայում կտեսնենք, որ հավասարման երկու մասերը քառակուսի բարձրացնելու հնարքը հաճախ է կիրառվում իռացիոնալ (և ոչ միայն իռացիոնալ) հավասարումներ լուծելիս:

Սակայն այստեղ հարկ է ուշադրություն դարձնել հետևյալ հանգամանքի վրա:

Ընդունված է ասել, որ տված երկու հավասարումներից երկրորդը առաջինի ***հետևանքն է,*** եթե առաջին հավասարման ցանկացած արմատ երկրորդի արմատն է:

Պարզ է, որ համարժեք հավասարումներից ցանկացածը մյուսի հետևանքն է:

Օրինակ, դիտարկենք $\sqrt{x} = 1$ և $x^2 = 1$ հավասարումները: Ինչպես վերը տեսանք, առաջին հավասարումն ունի միակ $x = 1$ արմատը, որը նաև երկրորդ հավասարման արմատ է, ուրեմն $x^2 = 1$ հավասարումը $\sqrt{x} = 1$ հավասարման հետևանքն է: Բայց $x^2 = 1$ հավասարումն ունի ևս մեկ $x = -1$ արմատ, որը $\sqrt{x} = 1$ հավասարման արմատ չէ: Հետևաբար $\sqrt{x} = 1$ և $x^2 = 1$ հավասարումները համարժեք չեն:

Հավասարման փոխարինումը ուրիշ հավասարումով, որը առաջինի հետևանքն է, անվանում են ***անցում հետևանք-հավասարման:*** Հետևանք-հավասարմանն անցնելու ընթացքում հնարավոր է այնպիսի արմատների ի հայտ գալը, որոնք սկզբնական հավասարման արմատներ չեն, այսինքն՝ հնարավոր է տվյալ հավասարման համար ***կողմնակի արմատների*** առաջացում:

Միևնույն ժամանակ հետևանք-հավասարմանն անցնելու ընթացքում հնարավոր չէ կորցնել սկզբնական հավասարման արմատները (դա բխում է հետևանք-հավասարման սահմանումից):

Այսպիսով, եթե տրված հավասարման լուծման ընթացքում անցում է կատարվել հետևանք-հավասարման, ապա անհրաժեշտ է ստուգել՝ հետևանք-հավասարման բոլոր արմատները սկզբնական հավասարման արմատնե՞ր են: Այլ կերպ ասած, հավասարման լուծման այս մեթոդի ընտրության դեպքում ***ստացված արմատների ստուգումը սկզբնական հավասարման մեջ հավասարման լուծման պարտադիր մասն է:***

Թվարկենք մի քանի ձևափոխություններ, որոնք բերում են հետևանք-հավասարման և հետևաբար կարող են բերել կողմնակի արմատների առաջացման:

1. ***Հավասարումը զույգ աստիճանի (մասնավորապես քառակուսի) բարձրացնելը:***

Օրինակ՝ $\sqrt{2x + 1} = -1$ հավասարումը քառակուսի բարձրացնելով՝ կստանանք $2x + 1 = 1$ հավասարումը, որն ունի $x = 0$ արմատ, մինչդեռ սկզբնական հավասարումը լուծում չունի:

2. ***Հավասարման հայտարարից ազատվելը:***

Օրինակ՝ $\dfrac{x-3}{\sqrt{2x-7}}=0$ հավասարման հայտարարից ազատվելը բերում է $x-3=0$ հետևանք հավասարման, որի $x=3$ արմատը սկզբնական հավասարման արմատ չէ, որովհետև այդ արժեքի դեպքում

$$2x-7=2\cdot 3-7=-1,$$

իսկ քառակուսի արմատ -1 թվից իմաստ չունի:

3. ***Նման անդամների միացումը:***

Օրինակ, նման անդամների միացումից հետո

$$\sqrt{x}+x+(1-\sqrt{x})=0$$

հավասարումից ստացվում է $x+1=0$ հավասարումը, որն ունի սկզբնական հավասարման համար կողմնակի հանդիսացող $x=-1$ արմատը:

Հարկ է նկատի ունենալ նաև, որ քառակուսի արմատ պարունակող հավասարումներում արմատի տակ գտնվող արտահայտությունները չեն կարող լինել բացասական: Դա երբեմն կարող է նպաստել հավասարման՝ արմատ չունենալու փաստի բացահայտմանը: Օրինակ, առանց քառակուսի բարձրացնելու

$$3\sqrt{2x-1}=\sqrt{-2x}$$

հավասարումը, կարելի է ցույց տալ, որ այն արմատ չունի:

Իրոք, այդ հավասարման ենթադրյալ արմատներն անհրաժեշտաբար պետք է բավարարեն

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ -2x\geqslant 0\end{cases}$$

համակարգին, որը, ակնհայտորեն, լուծում չունի:

Պարզ է, որ եթե որևէ հավասարման երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի (կամ ցանկացած բնական աստիճան), ապա կստանանք հետևանք-հավասարում:

Օրինակ 1. Լուծենք հավասարումը՝

$$\sqrt{4x+5}=\sqrt{5-2x}: \qquad (1)$$

Հավասարման երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի՝ ստանում ենք

$$4x+5=5-2x$$

հավասարումը, որն ունի միակ՝ $x=0$ արմատը: Մնում է ստուգել, իրո՞ք $x=0$-ն (1) հավասարման արմատ է:

Ստուգում՝ $\sqrt{4\cdot 0+5}-\sqrt{5-2\cdot 0}=\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$:

Պատ.՝ $x=0$:

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումը`

$$\sqrt{x} \cdot (x+1) = 0: \qquad (2)$$

Պայմանավորվենք x պարունակող որևէ $f(x)$ արտահայտության որոշման տիրույթը նշանակել $D(f)$-ով, այսինքն` $D(f)$-ը x-ի այն արժեքների բազմու-թյունն է, որոնց համար $f(x)$-ն իմաստ ունի:

Օրինակ` $\dfrac{-4x}{5-x}$ արտահայտության մեջ $x$ փոփոխականի թույլատրելի արժեքներն են բոլոր իրական թվերը` բացառությամբ 5-ի:

Ընդունված է նաև *հավասարման թույլատրելի արժեքների բազմություն (կրճատ` ԹԱԲ) անվանել անհայտի այն արժեքների բազմությունը, որոնց համար հավասարման ձախ և աջ մասերը միաժամանակ իմաստ ունեն:*

Այդ դեպքում $f_1(x)\, f_2(x) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ x \in D(f_2) \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0, \\ x \in D(f_1) \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Ուստի (2) հավասարման լուծումների բազմությունը $\sqrt{x} = 0$ հավասարման և

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծումների բազմությունների միավորումն է: Քանի որ համա-կարգը լուծում չունի, ուստի (2) հավասարումն ունի միակ արմատ $x = 0$:

Օրինակ 3. Լուծենք $\dfrac{x^2 - 4x}{\sqrt{x-2}} = 0$ հավասարումը: (3)

(3) հավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x^2 - 4x = 0, \\ \sqrt{x-2} \neq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

համակարգին:

(4) համակարգի հավասարումն ունի $x_1 = 0$ և $x_2 = 4$ արմատները, որոնցից համակարգի երկրորդ պայմանին բավարարում է միայն x_2 թիվը: Հետևաբար, (3) հավասարման միակ լուծումը $x_2 = 4$ թիվն է:

Պատ.` 4:

Առաջադրանքներ

536. Ո՞ր հավասարումն են անվանում իռացիոնալ հավասարում: Ինչպե՞ս կարելի է լուծել իռացիոնալ հավասարումը:

537. Բացատրեք, թե ինչո՞ւ հավասարումը քառակուսի բարձրացնելիս կարող են առաջանալ կողմնակի արմատներ:

538. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի արմատատակ արտահայտությունը:

Լուծեք հավասարումը (539, 540).

539. ա) $\sqrt{3x-1}=0$; բ) $\sqrt{4x+5}=2$; գ) $\sqrt{7-3x}=1$;
դ) $\sqrt{-x-1}=3$; ե) $\sqrt{-4+5x}=2$; զ) $\sqrt{-x}=\dfrac{1}{2}$:

540. ա) $\sqrt{x}=3$; բ) $\sqrt{x}=0$; գ) $\sqrt{x}=-1$;
դ) $\sqrt{2x}=1$; ե) $\sqrt{4x-1}=1$; զ) $\sqrt{x+2}=1$;
է) $\sqrt{3x-8}=6$; ը) $\sqrt{1+5x}=7$; թ) $\sqrt{x-3}-2=0$:

541. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում սկզբնական հավասարման հետևանք-հավասարում:
բ) Սկզբնական հավասարման արմատներն արդյոք հետևանք-հավասարման արմատներն են:
գ) Կարո՞ղ է արդյոք հետևանք-հավասարումն ունենալ արմատ, որը սկզբնական հավասարման արմատ չլինի:
դ) Ո՞ր ձևափոխություններն են բերում հետևանք-հավասարումների:
ե) Ստացված արմատների ստուգումը հավասարման լուծման պարտադի՞ր մասն է, եթե լուծման ընթացքում հավասարումից անցում է կատարվել հետևանք-հավասարման:

542. Բացատրեք՝ առաջին հավասարումից երկրորդին անցման ընթացքում ինչպիսի՞ ձևափոխություններն են բերում կողմնակի արմատների առաջացմանը: Ընտրեք երկրորդ հավասարման արմատ, որը կողմնակի է առաջին հավասարման համար.

ա) $x=2$, $x^2=4$;

բ) $\dfrac{(x-4)-(2x-3)}{x^2-1}=0$, $(x-4)-(2x-3)=0$;

գ) $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-4$, $x=-4$;

դ) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}=0$, $(x-2)(x-3)=0$;

ե) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}=0$: $x-1=0$:

Լուծեք հավասարումը (543-545).

543. ա) $\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+1}$; բ) $\sqrt{-4x+5}=\sqrt{-x+1}$;

գ) $\sqrt{3-3x}=\sqrt{4x-10}$; դ) $\sqrt{-3x-3}=\sqrt{-2x-9}$;

ե) $\sqrt{5x+2}=\sqrt{x}$; զ) $\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x}$:

544. ա) $5(7-3\sqrt{x})-3(2x-5\sqrt{x})=41$;

բ) $2(3-5\sqrt{x})-5(x-2\sqrt{x})=x$;

գ) $-3(1-2\sqrt{-x-1})-6(\sqrt{-x-1}+x)=1$;

դ) $1+\sqrt{x}=3-(2x-\sqrt{x})$:

545. ա) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}=0$; բ) $\dfrac{4x-3}{\sqrt{-x}}=0$; գ) $(3-3x)\sqrt{x}=0$;

դ) $(2-x)\sqrt{-1-x}=0$; ե) $\dfrac{6x}{3\sqrt{x}}=0$:

546. Ապացուցեք, որ հավասարումն արմատ չունի.

ա) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=3$; բ) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;

գ) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}=1$; դ) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{10-15x}=8$;

ե) $\sqrt{x}+2x^2+3=0$; զ) $2\sqrt{2x+3}+x^2-1=-2$:

547. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\sqrt{2x-3}+4=14-\sqrt{8x-12}$; բ) $5\sqrt{4x+1}-8\sqrt{16+64x}=0$;

գ) $3+\sqrt{x-3}=4-\sqrt{4x-12}$; դ) $2\sqrt{3x-8}-\sqrt{6x-16}=0$:

Բ. Պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումների լուծումը

Նախ վերհիշենք մեկ անհայտով անհավասարումների հետ առնչվող հիմնական հասկացությունները.

1. x անհայտով անհավասարման ***լուծում*** կոչվում է այն թիվը, որն x-ի փոխարեն տեղադրելով այդ անհավասարման մեջ՝ ստանում ենք թվային ճշմարիտ անհավասարություն:

2. ***Լուծել անհավասարումը*** նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծում չունի:
3. x անհայտ պարունակող երկու անհավասարումներ կոչվում են ***համարժեք,*** եթե առաջին անհավասարման ցանկացած լուծում երկրորդի լուծում է, և երկրորդ անհավասարման ցանկացած լուծում առաջինի լուծում է: Այլ խոսքով՝ երկու անհավասարումներ համարժեք են, եթե այդ անհավասարումների լուծումների բազմությունները համընկնում են: Մասնավորապես երկու անհավասարումներ համարժեք են, եթե դրանցից յուրաքանչյուրը լուծում չունի:

Մի անհավասարման փոխարինումը իրեն համարժեք անհավասարումով անվանում են անհավասարման համարժեք ձևափոխություն:

Եթե անհավասարման լուծման ընթացքում կատարված է անհավասարման համարժեք ձևափոխություն, ապա ձևափոխված անհավասարման լուծումների բազմությունը համընկնում է սկզբնական անհավասարման լուծումների բազմության հետ:

Թվարկենք անհավասարումների վերաբերյալ հիմնական համարժեք ձևափոխությունները.

ա) Անհավասարման անդամի տեղափոխությունը (հակադիր նշանով) անհավասարման մի մասից մյուսը:
բ) Անհավասարման երկու մասերի բազմապատկում միևնույն դրական թվով (կամ բաժանում միևնույն դրական թվի վրա):
գ) Նույնությունների կիրառություն:

Հաշվի առնելով վերն ասվածը՝ քննարկենք անհավասարումներ, որոնցում անհայտը գտնվում է արմատանշանի տակ: Այդպիսի անհավասարումներն անվանում են ***իռացիոնալ անհավասարումներ:***

Պարզագույն իռացիոնալ անհավասարումներն են $\sqrt{x} < a$ և $\sqrt{x} > a$, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Նախ դիտարկենք $\sqrt{x} < a$ տեսքի անհավասարումը:

Եթե $a \leqslant 0$, ապա ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման, անհավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a > 0$, ապա, ըստ բնական ցուցիչով աստիճանների հատկությունների, այդ անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 < a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < a^2, \end{cases}$$

որը լուծելով՝ ստանում ենք պատասխանը՝ $0 \leqslant x < a^2$:

Այժմ դիտարկենք $\sqrt{x} > a$ տեսքի անհավասարումը, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Եթե $a < 0$, ապա, անհավասարման լուծում է x փոփոխականի ցանկացած արժեք, որի համար $\sqrt{x}$-ն իմաստ ունի, այսինքն x-ի ցանկացած ոչ բացասական արժեք: Այդ դեպքում $\sqrt{x} \geqslant 0$ և հետևաբար $\sqrt{x}$-ը մեծ կլինի ցանկացած a բացասական թվից, այսինքն՝ տրված անհավասարման լուծումների բազմությունը $[0; +\infty)$ միջակայքն է:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա, հաշվի առնելով բնական ցուցիչով աստիճանների հատկությունները, ստանում ենք, որ $\sqrt{x} > a$ անհավասարումը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 > a^2, \end{cases}$$

որտեղից ստանում ենք պատասխանը՝ $x > a^2$:

Այժմ լուծենք պարզագույն ոչ խիստ $\sqrt{x} \leqslant a$ և $\sqrt{x} \geqslant a$ տեսքի անհավասարումները, որտեղ a-ն տված իրական թիվ է:

Նախ լուծենք

$$\sqrt{x} \leqslant a \qquad (1)$$

ոչ խիստ անհավասարումը:

Եթե $a < 0$, ապա, ըստ թվաբանական քառակուսի արմատի սահմանման՝ $\sqrt{x} \geqslant 0$ և հետևաբար (1) անհավասարումը լուծում չունի:

Եթե $a > 0$, ապա հաշվի առնելով, որ քառակուսի արմատի տակ գտնվող արտահայտությունը չի կարող լինել բացասական և նորից կիրառելով բնական ցուցիչով աստիճանի հատկությունները, ստանում ենք, որ (1) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 \leqslant a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant a^2, \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $[0; a^2]$ միջակայքն է:

Դիտողություն. Պարզ է, որ $a = 0$ դեպքում $\sqrt{x} \leqslant 0$ անհավասարման լուծումների բազմությունը միակ՝ $x = 0$ թիվն է:

Օրինակ՝ $\sqrt{2x-1} \leqslant 0$ անհավասարումը հնարավոր է միայն $2x - 1 = 0$ դեպքում, այսինքն՝ այդ անհավասարման լուծումների բազմությունը բաղկացած է մեկ թվից՝ $x = \dfrac{1}{2}$:

Քննարկենք

$$\sqrt{x} \geqslant a \qquad (2)$$

ոչ խիստ անհավասարումը:

Եթե $a < 0$, ապա, ինչպես և խիստ անհավասարման դեպքում էր, այս անհավասարման լուծում է հանդիսանում x-ի ցանկացած ոչ բացասական արժեք՝ $x \geqslant 0$:

Եթե $a \geqslant 0$, ապա կրկնելով (1) անհավասարման համար կատարված դատողությունները, կստանանք, որ (2) անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant a^2 \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $[a^2; +\infty)$ միջակայքն է:

Ինչպես և իռացիոնալ հավասարումների դեպքում էր, հարկ է նկատի ունենալ, որ քառակուսի արմատ պարունակող անհավասարումներում արմատի տակ գտնվող արտահայտությունները չեն կարող լինել բացասական: Դա երբեմն կարող է նպաստել անհավասարման լուծում չունենալու փաստի բացահայտմանը:

Օրինակ, լուծենք անհավասարումը՝

$$3\sqrt{4+x} - 2\sqrt{-5-x} > 3$$

Հաշվի առնելով վերն ասվածը՝ նշենք, որ եթե որևէ x թիվ այդ անհավասարման լուծում է, ապա այն պետք է բավարարի

$$\begin{cases} 4 + x \geqslant 0, \\ -5 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

համակարգին, որը, ակնհայտ է, լուծում չունի: Հետևաբար լուծում չունի նաև սկզբնական անհավասարումը:

Դիտարկենք իռացիոնալ անհավասարումների մի քանի այլ օրինակներ:

Օրինակ 1. Լուծենք անհավասարումը՝

$$2\sqrt{4+x} > \sqrt{2x+5} \tag{3}$$

Հաշվի առնելով վերը նշված դատողությունները՝ ստանում ենք, որ այս անհավասարումը համարժեք է

$$\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 0, \\ 2x + 5 \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{4x+3}\right)^2 > \left(\sqrt{2x+5}\right)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{3}{4}, \\ x \geqslant -\dfrac{5}{2}, \\ 4(4x+3) > 2x + 5 \end{cases}$$

համակարգին, որի լուծումների բազմությունը $x > -\dfrac{1}{2}$ պայմանին բավարարող թվերի բազմությունն է:

Պատ.՝ $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$:

Պարզ է, որ եթե (3) անհավասարման մեջ «>» նշանի փոխարեն լիներ «⩾», «<» կամ «⩽» նշանը, ապա լուծումը կտարվեր նույն կերպ` փոխելով միայն համակարգի երրորդ անհավասարման նշանը համապատասխան ձևով:

Օրինակ 2. Լուծենք անհավասարումը`

$$(5x+1)\sqrt{10x+17} > 0: \qquad (4)$$

Օգտվենք հետևյալ կարևոր փաստերից (որը կօգտագործենք նաև հետագայում).

ա) $f(x)\cdot g(x) > 0$ և $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ անհավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

բ) $f(x)\cdot g(x) < 0$ և $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ անհավասարումներից յուրաքանչյուրի լուծումների բազմությունը

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

համակարգերի լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Հետևաբար (4) անհավասարումը համարժեք է

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+1 > 0, \\ \sqrt{10x+17} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+1 < 0, \\ \sqrt{10x+17} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

միավորմանը: Ակնհայտ է, որ $\sqrt{10x+17} < 0$ անհավասարումը լուծում չունի, հետևաբար պետք է լուծել միայն

$$\begin{cases} 5x+1 > 0, \\ 10x+17 > 0 \end{cases}$$

համակարգը, որի լուծումների բազմությունն է` $x > -\dfrac{1}{5}$:

Պատ.` $\left(-\dfrac{1}{5};\, +\infty\right)$:

Օրինակ 3. Լուծենք անհավասարումը`

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4} \geqslant 0: \qquad (5)$$

Ըստ ոչ խիստ անհավասարումների լուծման ալգորիթմի՝ պետք է առանձին-առանձին լուծել

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4}=0 \qquad (6)$$

հավասարումը և

$$\frac{\sqrt{6+2x}}{x-4}>0 \qquad (7)$$

անհավասարումը ու ստացված լուծումների բազմությունները միավորել: Իսկ դրանցից յուրաքանչյուրի լուծման եղանակին մենք արդեն ծանոթ ենք: (6) հավասարման արմատն է $x=-3$ թիվը, իսկ (7) անհավասարման լուծումների բազմությունը $(4, +\infty)$ միջակայքն է:

Պատ.՝ $\{-1\}\cup(4; +\infty)$:

Դիտողություն. Նկատեք, որ ի տարբերություն իռացիոնալ հավասարումների՝ իռացիոնալ անհավասարումներում նպատակահարմար չէ անցնել հետևանք-անհավասարումների, որովհետև այս դեպքում ստացված լուծումների ստուգումը սկզբնական անհավասարման մեջ կապված է մեծ դժվարությունների հետ (հիմնականում լուծումների բազմությունը պարունակում է անվերջ քանակությամբ թվեր:

Առաջադրանքներ

548. Ո՞ր անհավասարումներն են անվանում իռացիոնալ:

549. Նկարագրեք $\sqrt{x}>a$ և $\sqrt{x}<a$ անհավասարումների լուծման եղանակները:

550. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $\sqrt{x}<-3$; բ) $\sqrt{x}<3$; գ) $\sqrt{x}>-4$; դ) $\sqrt{x}>5$:

551. Լուծեք հետևյալ ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $\sqrt{x}\leqslant-5$; բ) $\sqrt{x}\leqslant 1{,}1$; գ) $\sqrt{x}\geqslant 0$; դ) $\sqrt{x}\geqslant-3$:

552. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $\sqrt{3x+1}<-3$; բ) $3\sqrt{x-3}-\sqrt{1-x}>-1$;

գ) $\sqrt{7x-2}\geqslant-3$; դ) $2\sqrt{3x+5}<1$;

ե) $3\sqrt{3x-1}<2\sqrt{1-x}$; զ) $\sqrt{4x-3}-2>0$:

553. Ապացուցեք, որ անհավասարումը լուծում չունի.

ա) $\sqrt{5+3x} < -3$;
բ) $\sqrt{7-4x} \leqslant -1$;
գ) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{x-10}$;
դ) $\sqrt{6x-3} < 0$;
ե) $\sqrt{x+2} + \sqrt{-x-2} < 0$:

Լուծեք անհավասարումը և ոչ խիստ անհավասարումը (554-556).

554. ա) $\sqrt{3+11x} > 2$;
բ) $\sqrt{4+5x} \geqslant 3$;
գ) $\sqrt{7x-2} < 3$;
դ) $\sqrt{31+9x} \leqslant 1$:

555. ա) $\sqrt{10x+3} > \sqrt{2x-1}$;
բ) $\sqrt{2+7x} \geqslant 3\sqrt{4+x}$;
գ) $\sqrt{12x+1} < 4\sqrt{2+5x}$;
դ) $2\sqrt{3+21x} - 5\sqrt{x-2} \leqslant 0$:

❖ **556.** ա) $(x-1)\sqrt{x+13} > 0$;
բ) $(2x+1)\sqrt{2-4x} \leqslant 0$;
գ) $(5x+6)\sqrt{2x-1} < 0$;
դ) $(x-4)\sqrt{6+2x} \geqslant 0$:

❖ **557.** Լուծեք անհավասարումը.

ա) $x\sqrt{2x+3} > x$;
բ) $4x\sqrt{6+4x} \geqslant x$;
գ) $6x\sqrt{8x-1} < x$;
դ) $3x\sqrt{10+2x} \leqslant 5x$:

❖ **558.** Լուծեք անհավասարումները և ոչ խիստ անհավասարումները.

ա) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}} > 0$;
բ) $\dfrac{\sqrt{1+10x}}{\sqrt{x-1}} \geqslant 0$;
գ) $\dfrac{\sqrt{12x+1}}{\sqrt{21+x}} < 0$;
դ) $\dfrac{\sqrt{4+x}}{\sqrt{1-3x}} \leqslant 0$;
ե) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1} > 0$;
զ) $\dfrac{\sqrt{x-3}}{2-x} < 0$;
է) $\dfrac{\sqrt{-x}-2}{-2-x} > 0$;
ը) $\dfrac{\sqrt{-x}-3}{x+2} < 0$:

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ԵՌԱՆԴԱՄ

$$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$
$$D = b^2 - 4ac$$

Քառակուսային եռանդամի հիմնական հատկությունները

6.1. Քառակուսային եռանդամի վերլուծումը գծային արտադրիչների

x-ի նկատմամբ

$$ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

տեսքի բազմանդամը, որտեղ a-ն, b-ն և c-ն տված թվեր են, ընդ որում՝ $a \neq 0$, անվանում են ***քառակուսային եռանդամ:*** a թիվն անվանում են ***x2 -ու գործակից*** (կամ ***ավագ անդամի գործակից***), b-ն ***x-ի գործակից,*** c-ն՝ ***ազատ անդամ:***

$D = b^2 - 4ac$ թիվն անվանում են (1) ***քառակուսային եռանդամի պարբերիչ*** (դիսկրիմինանտ):

Թեորեմ 1. ***Ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝***

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]: \qquad (2)$$

Ապացուցում: Փակագծերից դուրս բերելով a արտադրիչը (որը, ըստ պայմանի, զրոյից տարբեր է), կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]:$$

Նշենք, որ (2) ***հավասարությունը նույնություն է:***

⌈Քառակուսային եռանդամի ներկայացումը (2) բանաձևով ընդունված է անվանել ***քառակուսային եռանդամից լրիվ քառակուսու առանձնացում:***⌋

Գործնականում սովորաբար (2) բանաձևից չեն օգտվում, այլ յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքում կրկնում են այդ բանաձևի ապացուցման ընթացքում բերված դատողությունները: Օրինակներ.

ա) $2x^2 + 4x + 34 = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 17) = 2\,[(x + 1)^2 + 16]$,

բ) $3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 3\,(x + 3)^2$,

գ) $2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8) = 2\,[(x - 1)^2 - 9]$:

Թեորեմ 2. ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի D պարբերիչը դրական է, ապա այդ քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել արտադրիչների՝***

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2), \tag{3}$$

որտեղ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}: \tag{4}$$

Ապացուցում: Թեորեմ 1-ում ցույց տրվեց, որ ճիշտ է (2) հավասարությունը: Քանի որ D > 0, ուստի

$$\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2:$$

Հետևաբար,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right]: \tag{5}$$

Կիրառելով քառակուսիների տարբերության բանաձևը՝ կստանանք՝

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right] =$$

$$= a \cdot \left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\right] \cdot \left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)\right]:$$

Այժմ, եթե նշանակենք՝

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

ապա կստանանք պահանջվող (3) հավասարությունը:

Նշենք, որ (3) ***հավասարությունը նույնություն է***:

$(x - x_1)$ և $(x - x_2)$ արտադրիչները կոչվում են ***գծային արտադրիչներ,*** դրա համար էլ (3) վերլուծությունը հաճախ անվանում են ***քառակուսային եռանդամի վերլուծում գծային արտադրիչների:***

Քանի որ $D > 0$, ապա այդ գծային արտադրիչներն իրարից տարբեր են:

Օրինակ.

$$2x^2 - 3x + 1 \qquad (6)$$

քառակուսային եռանդամը վերլուծենք գծային արտադրիչների:

Լուծում: Քանի որ $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, ուստի, ըստ թեորեմ 2-ի, (6) քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել գծային արտադրիչների:

Հաշվենք x_1 և x_2 թվերը՝

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}:$$

Հետևաբար, $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$:

Թեորեմ 3. ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի*** D ***տարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա այդ քառակուսային եռանդամը կարելի է վերլուծել երկու միապեսակ գծային արտադրիչների արտադրյալի:***

Ապացուցում: Ինչպես հետևում է թեորեմ 1-ից, եթե $D = 0$, ապա

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2:$$

Այս հավասարությունն էլ հենց նշանակում է, որ քառակուսային եռանդամը վերլուծված է երկու միատեսակ՝ $x + \dfrac{b}{2a}$ տեսքի գծային արտադրիչների:

Թեորեմ 4: ***Եթե*** $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի*** D ***տարբերիչը բացասական է, ապա այդ եռանդամը*** x***-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զրոյից տարբեր է, և այն հնարավոր չէ վերլուծել գծային արտադրիչների:***

Ապացուցում: Իրոք, եթե $D < 0$, ապա $\dfrac{-D}{4a^2} > 0$: Բացի այդ, x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում և $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$: Նշանակում է՝

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{-D}{4a^2}\right)>0:$$

Բազմապատկելով այս անհավասարության երկու մասերը a-ով՝ կստանանք՝

$$ax^2+bx+c>0, \text{ եթե } a>0 \quad \text{և} \quad ax^2+bx+c<0, \text{ եթե } a<0:$$

Թեորեմ 4-ի առաջին պնդումն ապացուցված է:

Թեորեմի երկրորդ պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Դիցուք՝ ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի տարբերիչը փոքր է 0-ից, բայց այն կարելի է ներկայացնել

$$a(x-m)(x-n)$$

տեսքով, որտեղ m-ը և n-ը որոշակի թվեր են: Այդ դեպքում $x=m$ և $x=n$ արժեքների համար այդ արտադրյալը հավասար է զրոյի, նշանակում է՝ զրոյի է հավասար նաև եռանդամը, ինչը հակասում է վերն ապացուցածին: Հետևաբար, $D<0$ պայմանի դեպքում քառակուսային եռանդամը հնարավոր չէ վերլուծել գծային արտադրիչների:

Այսպիսով, քառակուսային եռանդամը.

1) $D>0$ դեպքում վերլուծվում է իրարից տարբեր երկու գծային արտադրիչների,
2) $D=0$ դեպքում վերլուծվում երկու միատեսակ գծային արտադրիչների,
3) $D<0$ դեպքում հնարավոր չէ վերլուծել գծային արտադրիչների:

Դիտողություն 1: Առանձնացնենք կարևոր փաստեր, որոնք հետևում են թեորեմ 4-ի ապացուցման ընթացքից:

$D<0$ դեպքում ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի նշանը, ցանկացած x-ի դեպքում, համընկնում է a-ի նշանին: Այլ կերպ ասած, $a>0$ դեպքում $ax^2+bx+c>0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար, իսկ $a<0$ դեպքում $ax^2+bx+c<0$ x-ի ցանկացած արժեքի համար:

Դիտողություն 2: Թեորեմ (1)-ում ապացուցված (2) բանաձևից կարելի է ստանալ այսպիսի հետևություններ.

1. Եթե $a>0$, ապա ax^2+bx+c քառակուսային եռանդամի բոլոր հնարավոր թվային արժեքների բազմության մեջ չկա ***ամենամեծ թիվը,*** իսկ ***ամենափոքրը գոյություն ունի.*** այն հավասար է $-\dfrac{D}{4a}$ և ստացվում է $x=-\dfrac{b}{2a}$ արժեքի դեպքում (այս դեպքում ընդունված է $-\dfrac{D}{4a}$ թիվն անվանել ***քառակուսային եռանդամի փոքրագույն արժեք):***

Իրոք, (2) հավասարության աջ մասը ներկայացնելով

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

տեսքով և հաշվի առնելով, որ $-\dfrac{D}{4a}$-ն կախված չէ x-ի արժեքից (հաստատուն թիվ է), տեսնում ենք, որ $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ արտահայտության փոքրագույն արժեքը 0 է և ստացվում է $x=-\dfrac{b}{2a}$ դեպքում (քանի որ $a>0$)։ Մյուս կողմից՝ $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ արտահայտությունը կարող է ընդունել ցանկացած թվից մեծ արժեք (x-ի արժեքի համար ընտրության շնորհիվ)։

Նույն կերպ ցույց է տրվում, որ.

2. Եթե $a<0$, ապա ax^2+bx+c եռանդամը չունի փոքրագույն արժեք, սակայն ունի մեծագույն արժեք. այն հավասար է $-\dfrac{D}{4a}$ և ստացվում է $x=-\dfrac{b}{2a}$ արժեքի դեպքում։⌋

Առաջադրանքներ

559. Ի՞նչն են անվանում քառակուսային եռանդամ, քառակուսային եռանդամի տարբերիչ (դիսկրիմինանտ)։

560. Բերեք քառակուսային եռանդամի օրինակ, որի տարբերիչը.
ա) մեծ է զրոյից, բ) հավասար է զրոյի, գ) փոքր է զրոյից։

561. Անվանեք քառակուսային եռանդամի a, b և c գործակիցները.
ա) $3x^2+4x+5$; բ) $2x^2-5x-7$; գ) $-5x^2+3x-1$;
դ) $6x^2+x-2$; ե) x^2-x+7; զ) $-x^2+x+1$։

562. Կազմեք քառակուսային եռանդամ տրված գործակիցներով.
ա) $a=3,\ b=4,\ c=5$; բ) $a=3,\ b=-2,\ c=6$;
գ) $a=1,\ b=-1,\ c=2$; դ) $a=-1,\ b=3,\ c=-2$։

563. Գտեք քառակուսային եռանդամի տարբերիչը.
ա) $2x^2+5x+3$; բ) $2x^2-5x+3$; գ) $2x^2+5x-3$;
դ) $2x^2-5x-3$; ե) x^2-4x+5; զ) x^2+6x+9;
է) x^2+2x+1; ը) $-3x^2+5x-2$; թ) x^2+2x+2։

564. Առանձնացրեք լրիվ քառակուսի (ինչպես արված է առաջին երկուսում).
ա) $x^2-4x+5=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+5=(x-2)^2+1$;

բ) $2x^2 + 6x - 5 = 2(x^2 + 3x - 2{,}5) = 2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2{,}5\right) =$
$= 2(x + 1{,}5)^2 - 4{,}75$;

գ) $x^2 - 8x + 17$; դ) $x^2 + 4x + 4$; ե) $x^2 + 5x - 6$;
զ) $x^2 - 3x + 2$; է) $2x^2 - 8x + 7$; ը) $-4x^2 + 4x - 3$;
թ) $3x^2 - 2x + 1$; ժ) $3x^2 - 6x + 1$; ի) $-2x^2 - 8x + 10$:

565. Վերլուծվո՞ւմ է արդյոք քառակուսային եռանդամը գծային արտադրիչների, եթե նրա տարբերիչը.

ա) դրական է, բ) հավասար է զրոյի, գ) բացասական է:

566. Ինչպիսի՞ն պետք է լինի քառակուսային եռանդամի տարբերիչը, որպեսզի այն վերածվի.
ա) իրարից տարբեր գծային արտադրիչների,
բ) միատեսակ գծային արտադրիչների:

567. Պարզեք՝ վերլուծվո՞ւմ է արդյոք քառակուսային եռանդամը գծային արտադրիչների.
ա) $x^2 - 4x + 3$; բ) $x^2 - 4x + 4$; գ) $x^2 + 4x + 5$;
դ) $3x^2 - 4x + 1$; ե) $5x^2 - 6x + 1$; զ) $4x^2 + 4x + 2$:

568. Քառակուսային եռանդամը վերլուծեք գծային արտադրիչների.
ա) $2x^2 - 5x + 3$; բ) $3x^2 + 5x - 2$; գ) $5x^2 - 2x - 3$;
դ) $x^2 - 7x + 6$; ե) $x^2 + 6x - 7$; զ) $x^2 + x - 2$:
Ցուցում: Օգտվեք $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ հավասարությունից, որտեղ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}:$$

569. Քառակուսային եռանդամը վերլուծեք արտադրիչների, եթե դա հնարավոր է (իսկ եթե հնարավոր չէ, նշեք պատճառը).
ա) $x^2 + 8x + 15$; բ) $4x^2 - 4x + 1$; գ) $2x^2 - 3x + 4$:

570. Ապացուցեք, որ քառակուսային եռանդամի արժեքները x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում զրոյից տարբեր են.
Օրինակ: $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2 > 0$, x-ի ցանկացած արժեքի համար:
$-x^2 - 4x - 5 = -(x^2 + 4x + 4 + 1) = -((x + 2)^2 + 1) < 0$, x-ի ցանկացած արժեքի համար):

ա) $3x^2 - x + 1$; բ) $-5x^2 + 2x - 10$;
գ) $-x^2 + 5x - 7$; դ) $x^2 + 6x + 10$:

571. Ապացուցեք, որ կգտնվի x-ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում $x^2 - 7x + 6$ քառակուսային եռանդամի արժեքը
ա) դրական է, բ) բացասական է, գ) հավասար է զրոյի:

572. Գտեք արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.
ա) $1 - x^2$; բ) $2x + 3x^2$; գ) $3x^2 - 1$; դ) $4 - 8x + x^2$;
ե) $-x^2 + 2x - 1$; զ) $9 + 5x^2$; է) $-x^2$; ը) $(4 - 4x)^2 + 1$;
թ) $(1 + 2x)(1 - 3x)$; ժ) $(6 - 2x)x - 3$:

Կրճատեք կոտորակը (573-575).

573. ա) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$; բ) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$; գ) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}$;

դ) $\dfrac{x+3}{x^2-9}$; ե) $\dfrac{2x+2}{x^2+2x+1}$; զ) $\dfrac{x^2-x+1}{x^3+1}$:

574. ա) $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$; բ) $\dfrac{x+1}{x^2-5x-6}$; գ) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x+3}$;

դ) $\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; ե) $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$; զ) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-2x-3}$:

575. ա) $\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+5x-7}$; բ) $\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+7x-9}$;

գ) $\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2+5x+2}$; դ) $\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-5x+2}$:

576. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2-1}$; բ) $\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$;

գ) $\dfrac{4x}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{x+1}$; դ) $\dfrac{2x}{x^2-x-2} - \dfrac{5}{x-2}$;

ե) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x^2-x-6}$; զ) $\dfrac{3}{x+5} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+4x-5}$:

6.2. Քառակուսային հավասարման հասկացությունը

x անհայտով ***քառակուսային հավասարում*** անվանում են այն հավասարումը, որի ձախ մասը x-ի նկատմամբ քառակուսային եռանդամ է, իսկ աջ մասը՝ զրո:

Քառակուսային հավասարումն անվանում են նաև ***երկրորդ աստիճանի հավասարում:***

Քառակուսային հավասարման օրինակներ են՝

$$2x^2 - 3x - 7 = 0, \quad 2x^2 - 3 = 0, \quad x^2 - 4x = 0, \quad -x^2 + 11 = 0, \quad -5x^2 + 3x + 5 = 0$$

Դիտարկենք *ընդհանուր տեսքով անհայտով քառակուսային հավասարում*՝

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,} \qquad (1)$$

որտեղ a, b և c-ն տված թվեր են ($a \neq 0$):

a-ն կոչվում է x^2-ու ***գործակից,*** b-ն՝ x-ի ***գործակից,*** c-ն՝ (1) հավասարման ***ազատ անդամ:***

ax^2, bx և c արտահայտություններն անվանում են (1) հավասարման ***անդամներ:*** $D = b^2 - 4ac$ թիվն անվանում են (1) քառակուսային հավասարման ***տարբերիչ (դիսկրիմինանտ):***

Այսպես,

$$2x^2 - 3x - 7 = 0$$

հավասարման մեջ 2-ը x^2-ու գործակիցն է, -3-ը՝ x-ի գործակիցը, -7-ը՝ ազատ անդամը, $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2\,(-7) = 65$-ը՝ տարբերիչը:

$$x^2 - 3 = 0$$

հավասարման մեջ 1-ը x^2-ու գործակիցն է, 0-ն՝ x-ի գործակիցը, -3-ը՝ ազատ անդամը, $D = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 12$-ը՝ տարբերիչը:

Հիշեցնենք, որ x անհայտով հավասարման ***արմատ*** (կամ լուծում), անվանում են այն թիվը, որը հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով ստացվում է թվային հավասարություն:

Օրինակ՝ 0 թիվը

$$2x^2 - 7x = 0$$

հավասարման արմատ է, քանի որ այդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով 0, ստանում ենք թվային ճիշտ հավասարություն՝

$$2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 = 0$$

Լուծել հավասարումը, նշանակում է՝ գտնել նրա բոլոր արմատները կամ ցույց տալ, որ արմատ չունի:

Հաջորդ կետերում ցույց կտրվի, թե ինչպես պետք է լուծել քառակուսային հավասարումը, այսինքն ինչպես պետք է գտնել նրա արմատները:

Հավասարումները լուծելիս հարկ է լինում հավասարման երկու մասերը բազմապատկել միևնույն՝ զրոյից տարբեր թվով կամ բաժանել միևնույն՝

զրոյից տարբեր թվի վրա, ինչպես նաև հավասարման անդամները նրա մի կողմից տեղափոխել մյուս կողմ: Արդյունքում կստացվեն սկզբնական հավասարմանը ***համարժեք*** հավասարումներ, այսինքն հավասարումներ, որոնք ունեն միայն և միայն այն արմատները, ինչը որ ունի սկզբնական հավասարումը (կամ արմատ չունեն, եթե սկզբնական հավասարումը արմատ չունի): Այս պնդումների ապացուցումները կատարվում են ճիշտ այնպես, ինչպես դա արվեց գծային հավասարումների դեպքում:

Առաջադրանքներ

577. ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում քառակուսային հավասարում:
բ) Հետևյալ հավասարումների մեջ ցույց տվեք քառակուսային կամ քառակուսայինի համարժեք հավասարումները.

1) $3x^2 - 2x + 1 = 0$; 2) $4 = x^2$;
3) $2x - 8 = 0$; 4) $x(x - 1) = 3$;
5) $\frac{1}{x} - 2 = 0$; 6) $x^2 + 3x = 0$;
7) $-0{,}5x + 3x^2 - 7 = 0$; 8) $12x - 3x^2 + 5 = 0$:

578. Նախորդ խնդրում բերված քառակուսային հավասարումներում որոշեք a, b գործակիցները և c ազատ անդամը:

579. Անվանեք քառակուսային հավասարման անդամները, x^2-ի x-ի գործակիցները և ազատ անդամը.

ա) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; բ) $x^2 - 5x + 1 = 0$;
գ) $x^2 - 9 = 0$; դ) $x^2 - 9x = 0$:

580. Կազմեք $ax^2 + bx + c = 0$ քառակուսային հավասարում, եթե նրա գործակիցները հավասար են.

ա) $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4$; բ) $a = 3, \quad b = -3, \quad c = 1$;
գ) $a = -1, \quad b = 0{,}5, \quad c = \frac{1}{3}$; դ) $a = 5, \quad b = 2, \quad c = 0$;
ե) $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 7$; զ) $a = -\frac{1}{3}, \quad b = 0, \quad c = -8$:

581. Գտեք քառակուսային հավասարման տարբերիչը.

ա) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; բ) $x^2 + 5x + 1$;
գ) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; դ) $x^2 + x + 1 = 0$:

582. Ստուգեք՝ 0 թիվը հավասարման արմա՞տ է.

ա) $x^2 - 5x = 0$;   բ) $x^2 + 1 = 0$;
գ) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;   դ) $x^2 - 5 = 0$;
ե) $x^2 + x = 0$;   զ) $x^2 + 10x + 0{,}1 = 0$:

583. Ստուգեք՝ 1 և −1 թվերից գոնե մեկը հավասարման արմա՞տ է.

ա) $x^2 + x = 0$;   բ) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
գ) $x^2 - 4x + 4 = 0$;   դ) $x^2 - x = 0$;
ե) $x^2 + 6x + 5 = 0$;   զ) $x^2 - 1 = 0$:

584. $-1, -\frac{1}{3}, 0, 1, 2$ թվերից ընտրեք հավասարման արմատները.

ա) $x^2 - x - 2 = 0$;   բ) $x^2 + x = 0$;
գ) $3x^2 = -x$;   դ) $3x^2 + 5x = 0$;
ե) $4x - 5 = -6 - 3x^2$;   զ) $2x + x^2 = -2 - x$:

585. Ընտրեք հավասարման գոնե մեկ արմատ.

ա) $x^2 - 4 = 0$;   բ) $x^2 - 4x = 0$;
գ) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;   դ) $5x^2 - x - 6 = 0$:

586. Ո՞ր հավասարումներն են անվանում համարժեք:

587. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.

ա) $2x^2 = 5x$ և $2x^2 - 5x = 0$;
բ) $7x^2 = 28$ և $x^2 = 4$;
գ) $x^2 - 8x + 8 = 3x^2 - 8$ և $x^2 + 4x - 8 = 0$;
դ) $(x - 1)(x + 5) = 2(x - 1)$ և $x + 4 = 1$;
ե) $x^2 + 3x - 5 = x^2 + 4$ և $3x - 5 = 4$;
զ) $(x - 2)x = x$ և $x - 1 = 2$:

6.3. Թերի քառակուսային հավասարումներ

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

քառակուսային հավասարումն անվանում են ***թերի***, եթե b և c թվերից գոնե մեկը հավասար է զրոյի: Այս կետում դիտարկվում են թերի քառակուսային հավասարումների լուծումները:

Օրինակ 1. Լուծենք հավասարումը՝

$$x^2 = 0; \tag{1}$$

Գոյություն ունի միայն մեկ թիվ՝ 0-ն, որի քառակուսին հավասար է 0: Հետևաբար (1) հավասարումն ունի միակ արմատ՝ 0:

Թերի քառակուսային հավասարումը, որում $b = c = 0$, այսինքն՝

$$ax^2 = 0 \ (a \neq 0),$$

հավասարումը համարժեք է (1) հավասարմանը և, հետևաբար, նույնպես ունի միակ արմատ՝ 0:

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումը՝

$$x^2 - 5 = 0: \tag{2}$$

Այս հավասարումը համարժեք է $x^2 = 5$ հավասարմանը:

Հետևաբար մեզ անհրաժեշտ է գտնել բոլոր այն թվերը, որոնց քառակուսիները հավասար են 5 թվին: Այդպիսի թվեր միայն երկուսն են՝ $\sqrt{5}$ և $-\sqrt{5}$-ը (հիշենք թվաբանական արմատի սահմանումը):

Այսպիսով, (2) հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_1 = \sqrt{5} \ \text{ և } \ x_2 = -\sqrt{5}:$$

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումը՝

$$x^2 + 7 = 0: \tag{3}$$

Ակնհայտ է, որ այս հավասարումն արմատ չունի: Չէ՞ որ ցանկացած x իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական է, և հետևաբար $x^2 + 7$-ը դրական թիվ է:

Թերի քառակուսային հավասարումը, որում $b = 0$, ունի

$$ax^2 + c = 0 \ (a \neq 0) \tag{4}$$

տեսքը: Այս հավասարումը համարժեք է

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0 \tag{5}$$

հավասարմանը:

Պարզ է, որ եթե $\frac{c}{a}$-ը դրական թիվ է, ապա, (5) հավասարումը և հետևաբար նրան համարժեք (4) հավասարումն արմատներ չունի:

Դիցուք՝ $\frac{c}{a}$-ը բացասական թիվ է: (5) հավասարումը համարժեք է

$$x^2 = -\frac{c}{a} \tag{6}$$

հավասարմանը: Քանի որ $-\frac{c}{a}$-ը դրական թիվ է, ուստի (6) հավասարումը, հետևաբար նրան համարժեք (5) հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}:$$

$c = 0$ դեպքում (4) հավասարումը, ինչպես արդեն գիտենք, ունի $x = 0$ միակ արմատը:

Օրինակ 4. Լուծենք հավասարումը՝

$$x^2 - 3x = 0: \qquad (7)$$

(7) հավասարումը ներկայացնենք այսպես՝

$$x(x - 3) = 0: \qquad (8)$$

Ակնհայտ է, այս հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ՝:

Թերի քառակուսի հավասարումը, որում $c = 0$, $b \neq 0$ ունի

$$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0) \qquad (9)$$

տեսքը:

Այդ հավասարումը համարժեք է

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = 0 \qquad (10)$$

հավասարմանը:

Այնպես, ինչպես 4-րդ օրինակում, (10) հավասարումը և հետևաբար նրան համարժեք (9) հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_1 = 0 \quad \text{և} \quad x_2 = -\frac{b}{a}:$$

Բերված օրինակները ցույց են տալիս, որ թերի քառակուսային հավասարումը կարող է ունենալ մեկ կամ երկու արմատ և կարող է արմատ չունենալ:

Հետագայում մենք կտեսնենք, որ ցանկացած քառակուսային հավասարում ունի կամ մեկ արմատ, կամ երկու արմատ, կամ արմատ չունի:

Առաջադրանքներ

588. Ո՞ր հավասարումներն են անվանում թերի քառակուսային հավասարումներ:

589. Քանի՞ արմատ կարող է ունենալ թերի քառակուսային հավասարումը.

ա) $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$; բ) $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$:

Լուծեք հավասարումը (590-594).

590. ա) $3\,(x^2 - 1) = 0$; բ) $2x^2 = 0$;

գ) $x\,(x - 1) = 0$; դ) $(x + 3)\,x = 0$;

ե) $(x - 3)(x + 2) = 0$; զ) $(x + 5)(x - 7) = 0$;

է) $3x(x-0,5)=0;$ ը) $0,5x(2+x)=0;$

թ) $3(x-8)(5+x)=0;$ ժ) $0,8(x+1)(x-4)=0:$

591. ա) $x^2-4x=0;$ բ) $x^2+6x=0;$ գ) $3x^2+x=0;$
դ) $x^2-0,5x=0;$ ե) $2x+3x^2=0;$ զ) $x-2x=0;$
է) $7x^2=5x;$ ը) $3x=11x^2;$ թ) $\frac{1}{2}x^2-3x=0:$

592. ա) $2x^2=3,$ բ) $x^2-9=0;$
գ) $x^2-25=0;$ դ) $16-x^2=0;$
ե) $49-x^2=0;$ զ) $3+x^2=0;$
է) $8-2x^2=0;$ ը) $3-12x^2=0;$
թ) $7=28x^2;$ ժ) $\frac{1}{4}+x^2=0;$ ի) $x^2-\frac{4}{9}=0:$

593. ա) $x^2-3=0;$ բ) $x^2-5=0;$ գ) $\frac{1}{3}x^2-1=0;$
դ) $\frac{1}{5}x^2-10=0;$ ե) $4x^2-3=0;$ զ) $5x^2+2=0;$
է) $x^2=2304;$ ը) $x^2-31,36=0;$ թ) $0,001x^2=40:$

594. ա) $4x^2+6x=7x^2-12x;$ բ) $1,2x-0,5x^2=4x^2-0,8x;$
գ) $0,76x^2+1,4x=0;$ դ) $0,6x^2+\sqrt{3}\cdot x=0;$
ե) $0,07x^2-50=2,1x-50;$ զ) $9x^2-10x=7x^2-15x;$
է) $-0,5x^2+\sqrt{5}\cdot x=0;$ ը) $\frac{2}{3}x^2=5x:$

595. Գրեք քառակուսային հավասարման ընդհանուր տեսքը, եթե.
ա) նրա արմատներից մեկը հավասար է զրոյի, իսկ մյուսը հավասար չէ զրոյի:
բ) նրա երկու արմատներն էլ զրո են:
գ) նրա արմատները մոդուլով հավասար են, բայց ունեն հակադիր նշաններ:

596. Գրեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են.
ա) 0 և 0; բ) 0 և 4; գ) -1 և 7;
դ) 0,5 և 8; ե) -5 և $+5$; զ) $-\sqrt{7}$ և $\sqrt{7}$;
է) 5 և 3; ը) -1 և 9:

597. Լուծեք հավասարումը.
ա) $(x-1)^2+(x+1)^2=2;$
բ) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)+26=0;$

գ) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(x+2)=24$;
դ) $(2x-5)(3x-4)-(3x+4)(x-2)-10x-28=0$;
ե) $(x+2)(x-3)(x-1)=x(x+1)(x+6)+6$:

❖ **598.** Լուծեք հավասարումը.

ա) $(x-1)^2-1=0$;
բ) $(x+2)^2-4=0$;
գ) $\frac{4x^2-1}{3}-\frac{3x^2+8}{5}=1$;
դ) $\frac{5x^2-48}{8}-\frac{33-2x^2}{6}=3\frac{5}{6}$;
ե) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$;
զ) $(3x+1,5)(3x-1,5)=54$;
է) $\frac{3x^2-4x}{2}=\frac{5x^2-x}{3}$;
ը) $\frac{2x-3x^2}{5}-\frac{7x^2-x}{4}=\frac{x^2}{2}$:

599. ա) m-ի հ՞նչ արժեքների դեպքում $x^2+m=0$ հավասարումն ունի արմատ:
բ) Գրեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներից մեկը զրո է:
գ) k-ի հ՞նչ արժեքի դեպքում $10x^2+4x-k=0$ հավասարումն ունի 0 արմատ:

600. ա) Բնական թվի քառակուսին հավասար է այդ թվի եռապատիկին: Գտեք այդ թիվը:
բ) Բնական թվի քառակուսին երկու անգամ փոքր է այդ թվից: Գտեք այդ թիվը:

❖ **601.** Լուծեք հավասարումն x-ի նկատմամբ (համարելով՝ m-ը և n-ը տրված թվեր են).

ա) $m^2x^2-n^2=0$;
բ) $m^2x^2-4=0$;
գ) $mx^2-\frac{1}{m}=0$;
դ) $nx^2-\frac{m^2}{n}=0$:

6.4. Ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման լուծումը

Այս կետում մենք դիտարկում ենք ընդհանուր տեսքով տրված

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0) \qquad (1)$$

քառակուսային հավասարման լուծումը:

Թեորեմ 1: ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման տարբերիչը դրական է, ապա այն ունի իրարից տարբեր երկու արմատ՝***

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D > 0, ապա

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

որտեղ x_1-ը և x_2-ը որոշվում են (2) հավասարություններով:

Ուստի (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (a \neq 0) \tag{3}$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, որ (3) հավասարումն ունի x_1 և x_2 արմատներ և այլ արմատներ չունի: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2. ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման տարբերիչը հավասար է զրոյի, ապա այն ունի***

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

միակ արմատը:

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D = 0, ապա ճիշտ է

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_0)^2$$

հավասարությունը, որտեղ

$$x_0 = -\frac{b}{2a}:$$

Ուստի (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$a(x - x_0)^2 = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{4}$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, որ x_0-ն (4) հավասարման միակ արմատն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3. ***Եթե (1) քառակուսային հավասարման տարբերիչը բացասական է, ապա այն արմատ չունի:***

Ապացույց: Ինչպես ցույց է տրված 6.1 կետում, եթե D < 0, ապա x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ եթե } a > 0,$$

կամ

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ եթե } a < 0:$$

Դա նշանակում է, որ եթե $D < 0$, ապա գոյություն չունի իրական թիվ, որը x-ի փոխարեն տեղադրելով (1) հավասարման ձախ մասում՝ ստացվի զրո, այսինքն՝ $D < 0$ դեպքում (1) հավասարումն արմատ չունի: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, ***(1) քառակուսային հավասարումը***

1) ունի երկու իրարից պարբեր արմատներ, եթե նրա պարբերիչը մեծ է զրոյից,

2) ունի միակ արմատ, եթե նրա պարբերիչը հավասար է զրոյի,

3) արմատ չունի, եթե նրա պարբերիչը փոքր է զրոյից:

Դիտողություն 1. Եթե (1) հավասարման տարբերիչը դրական է, ապա այդ հավասարման արմատների (2) բանաձևերը հաճախ գրառում են մեկ բանաձևի տեսքով՝

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}: \qquad (5)$$

Դիտողություն 2. Եթե $D = 0$, ապա (5) բանաձևը մնում է ուժի մեջ: Այդ դեպքում այն տալիս է

$$x = -\frac{b}{2a}$$

միակ արմատը, կամ ինչպես ասում են, երկու համընկնող արմատներ՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}:$$

Հետագայում քառակուսային հավասարումներ լուծելիս մենք չենք կրկնի վերը բերված դատողությունները, այլ միանգամից կօգտվենք (5) բանաձևից:

Օրինակ 1. Լուծենք հավասարումը՝

$$3x^2 + 2x - 2 = 0: \qquad (6)$$

Հաշվենք (6) հավասարման տարբերիչը՝

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 > 0$$

Հետևաբար, (6) հավասարումն ունի երկու արմատ, որոնք հաշվվում են (5) բանաձևով:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}:$$

Օրինակ 2. Լուծենք հավասարումը՝

$$25x^2 - 30x + 9 = 0: \qquad (7)$$

Հաշվենք (7) հավասարման տարբերիչը՝

$$D = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0$$

Հետևաբար (7) հավասարումն ունի միակ արմատ, որը կարելի է հաշվել

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ բանաձևով՝ } \quad x = \frac{30}{2 \cdot 25} = 0{,}6:$$

Օրինակ 3. Լուծենք հավասարումը՝

$$2x^2 - 4x + 3 = 0: \qquad (8)$$

Հաշվենք (8) հավասարման տարբերիչը՝

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0:$$

Հետևաբար (8) հավասարումն արմատ չունի:

Դիտողություն: $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման արմատներն անվանում են նաև $ax^2 + bx + c$ ***քառակուսային եռանդամի արմատներ***:

Առաջադրանքներ

602. Ի՞նչն են անվանում քառակուսային հավասարման տարբերիչ:

603. Քանի՞ արմատ ունի քառակուսային հավասարումը, եթե նրա տարբերիչը.
ա) դրական է, բ) հավասար է զրոյի, գ) բացասական է:

604. Ի՞նչ բանաձևով կարելի է գտնել քառակուսային հավասարման արմատները, եթե նրա տարբերիչը ոչ բացասական է:

605. Հավասարման մեջ նշենք x-ի և x^2-ու գործակիցները, ազատ անդամը: Հաշվեք տարբերիչը և նշեք հավասարման արմատների քանակը.

ա) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
բ) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
գ) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;
դ) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$;
ե) $4x - x^2 - 1 = 0$;
զ) $3 + 2x^2 - 7x = 0$;
է) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$;
ը) $\frac{x^2}{2} - 3{,}5 = 2x$;
թ) $x^2 = \frac{x}{2} - 1$;
ժ) $4 - 4x + x^2 = 0$:

606. Լուծեք հավասարումը.

ա) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
բ) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
գ) $x^2 - x - 2 = 0$;
դ) $x^2 + x - 6 = 0$;
ե) $x^2 + 4x + 15 = 0$;
զ) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
է) $5x^2 + 8x - 9 = 0$;
ը) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
թ) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;
ժ) $5x^2 - 6x + 1 = 0$:

607. Լուծեք հավասարումը՝ նախապես հավասարման երկու մասերը բազմապատկելով այնպիսի թվով, որ նրա գործակիցները դառնան ամբողջ թվեր.

ա) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$;
բ) $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$;
գ) $x^2 - 8 - \frac{x}{3} = 0$;
դ) $x^2 + \frac{x}{7} - 50 = 0$;
ե) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$;
զ) $x^2 - 5\frac{1}{5}x + 1 = 0$:

Լուծեք հավասարումը (608-612).

608. ա) $2x^2 = 5 + 3x$;
բ) $-x^2 + 14x - 48 = 0$;
գ) $-7x^2 + 2x = -329$;
դ) $x^2 + x - 5 = 0$;
ե) $2x^2 - 17x - 9 = 0$;
զ) $7x^2 + 13x - 3 = 0$;
է) $9x^2 - 20 = 24x$;
ը) $4x^2 - 4x = 15$:

609. ա) $(x + 8)(x - 9) = -52$;
բ) $(x - 1)(2x + 3) = 7$;
գ) $(x + 1)(x + 2) = (2x - 1)(2x - 10)$;
դ) $(x - 1)(x - 2) = (3x + 1)(x - 2)$;
ե) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x + 5}{6}$;
զ) $\frac{5(x^2 - 1)}{4} = \frac{x}{6} - 2$;
է) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x - 10}{4}$;
ը) $\frac{x - 3}{4} + \frac{2x + 3}{6} = \frac{x^2 - 11}{12}$:

610. ա) $(x + 3)(x - 2) + (x + 2)^2 = 3x + 10$;
բ) $(x - 5)^2 + (3 - x)^2 - 4(x + 5)(3 - x) - 48 = (x + 1)^2$;
գ) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x^2 + 3)(x - 5) + 2x = 33$;
դ) $8x^2 + 11 + \frac{x}{7} = \frac{1 - 5x}{7}$;
ե) $1{,}2x^2 - 0{,}8x - 3{,}1 = 0$;
զ) $0{,}3x^2 + 2{,}3x - 3{,}4 = 0$:

611. ա) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
բ) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
գ) $x^2 - 3x = 1{,}75$;
դ) $x^2 + x = 2$;
ե) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
զ) $x^2 + 8x + 2 = 0$;
է) $x^2 - 3x + 1 = 0$;
ը) $x^2 - 5x - 1 = 0$;
թ) $x^2 + 8x + 15 = 0$;
ժ) $x^2 + 5x - 6 = 0$:

❖ **612.** ա) $5x^2 - 6x + 1{,}75 = 0$;
բ) $\sqrt{2}\,x^2 - 10x + 8\sqrt{2} = 0$;
գ) $11x^2 - 10x - 9 = 0$;
դ) $\sqrt{3}\,x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{3} = 0$;
ե) $\frac{5}{4}x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$;
զ) $2x^2 - 3{,}1x + 0{,}42 = 0$;
է) $3x^2 + 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$;
ը) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{3}{5}x = 0$;
թ) $46x - 21 + 7x^2 = 0$;
ժ) $2x^2 + (3 - 2\sqrt{2})\,x - 3\sqrt{2} = 0$;
ի) $\sqrt{3}\,y^2 - 8\sqrt{2}\,y + 4\sqrt{3} = 0$;
լ) $16a^2 - 8\sqrt{2}\,a + 1 = 0$;
խ) $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + \sqrt{3} = 0$;
ծ) $(x - 3)^2 = 1 - \pi$;
կ) $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 5$;
հ) $(5 - 3x)(3x + 5) - 2x(x - 3) = 25$:

Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները (613, 614).

613. ա) $(x + 4)(x - 3) = 0$ և $x^2 + x - 12 = 0$;
բ) $(x + 3)(x - 1) = 0$ և $x^2 - 2x - 3 = 0$;
գ) $(x - 2)(x + 1) = 0$ և $x + \frac{6}{2 - x} = 1$;
դ) $(x - 1)(x - 2) = 0$ և $\frac{3}{2 - x} - x = 2$;
ե) $x + 4 = 2x$ և $x = 4$;
զ) $2x + 5 = 0$ և $x + 3 = 0$;
է) $2x = 5$ և $x = -2{,}5$;
ը) $x^2 + x = 0$ և $x^2 = 0$:

614. ա) $2(x + 1) = 3(x - 2)$ և $2(x + 1) + 1 = 3(x - 2) + 1$;
բ) $2(x + 1) + x + 2 = 3(x - 2) + x + 2$ և $2(x + 1 = 3(x - 2)$;
գ) $2(x + 1) + \frac{1}{x} = 3(x - 2) + \frac{1}{x}$ և $2(x + 1) = 3(x - 2)$;
դ) $x = 2$ և $x + \frac{2 - x}{x + 1} = 2 + \frac{2 - x}{x + 1}$;
ե) $x + 1 = 2 - x$ և $2(x + 1) = 2(2 - x)$;
զ) $x + 1 = 2 - x$ և $x(x + 1) = x(2 - x)$;
է) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(x - 1) = (2 - x)(x - 1)$;
ը) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(x^2 + 2) = (2 - x)(x^2 + 2)$;
թ) $x + 1 = 2 - x$ և $(x + 1)(2x - 1) = (2 - x)(2x - 1)$:

615. Ապացուցեք, որ $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարման արմատները $D \geqslant 0$ դեպքում կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ որտեղ } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac:$$

Այդ բանաձևով լուծեք հավասարումը.

ա) $x^2 - 8x + 7 = 0;$ բ) $x^2 + 2x - 8 = 0;$
գ) $x^2 + 2x - 3 = 0;$ դ) $3x^2 - 10x + 8 = 0;$
ե) $8x^2 - 8x + 5 = 0;$ զ) $24x^2 - 10x + 1 = 0;$
է) $3x^2 - 8x + 5 = 0;$ ը) $5x^2 + 8x + 3 = 0:$

616. m-ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում հավասարումն ունի միակ արմատ (երկու համընկնող արմատներ).

ա) $x^2 + mx + 3 = 0;$ բ) $2x^2 - mx - 2 = 0;$
գ) $3x^2 - 2x + m = 0;$ դ) $x^2 = mx + m:$

❖ **617.** Լուծեք հավասարումը.
ա) $ax^2 - 2x + 1 = 0$, եթե $a \leqslant 1$ և $a \neq 0;$
բ) $x^2 - 4x + 4a = 0$, եթե $a \leqslant 1:$

❖ **618.** Ինչպիսի՞ a թվի համար $x^2 + 2x + a = 0$ հավասարումը.
ա) ունի ճիշտ երկու արմատ,
բ) ունի միակ արմատ,
գ) արմատ չունի:

❖ **619.** Յուրաքանչյուր a իրական թվի համար լուծեք հավասարումը.
ա) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0;$ բ) $ax^2 - 2x + 1 = 0;$
գ) $x^2 - 4x + 4a = 0;$ դ) $x^2 + 2x + a = 0:$

6.5. Բերված տեսքի քառակուսային հավասարում

Քառակուսային հավասարումը, որում x^2-ու գործակիցը 1 է, անվանում են ***բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:***

$$x^2 - 2x + 7 = 0,\ \ x^2 = 0,\ \ x^2 - 5 = 0,\ \ x^2 - 3x = 0$$

հավասարումները բերված տեսքի քառակուսային հավասարումների օրինակներ են: Բերված տեսքի քառակուսային հավասարումն ընդհանուր տեսքով սովորաբար գրառում են այսպես՝

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

որտեղ p-ն և q-ն տրված թվեր են: p-ն կոչվում է x-ի գործակից, իսկ q-ն՝ ազատ անդամ:

Այսպիսով, (1) հավասարումը կարելի է դիտարկել որպես ընդհանուր տեսքի

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2}$$

քառակուսային հավասարման մասնավոր դեպք, որտեղ $a = 1$, $b = p$, $c = q$:

(1) հավասարման տարբերիչը հավասար է՝

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac = p^2 - 4q:$$

Դիցուք՝ $\mathrm{D} > 0$. այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, (1) հավասարումն ունի

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{4}$$

բանաձևով հաշվվող երկու արմատ:

$\mathrm{D} = 0$ դեպքում (1) հավասարումն ունի միակ արմատ կամ, ինչպես ասում են, երկու համընկնող արմատներ՝

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}: \tag{5}$$

Իսկ եթե $\mathrm{D} < 0$, ապա, ինչպես գիտենք, (1) հավասարումն արմատ չունի:

Սովորաբար (1) բերված տեսքի հավասարման համար D տարբերիչի փոխարեն դիտարկվում է $\frac{\mathrm{D}}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ արտահայտությունը, որն ունի նույն նշանը, ինչը որ D-ն: Ընդ որում՝ բերված տեսքի քառակուսային հավասարման արմատների (4) բանաձևը գրում են այսպես՝

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{D}}{4}}: \tag{6}$$

Մենք ցույց տվեցինք, որ.

1) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, ապա (1) հավասարումն ունի (6) բանաձևով հաշվվող երկու արմատ,

2) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, ապա (1) հավասարումն ունի երկու համընկնող արմատներ, որոնք հաշվվում են նույն (6) բանաձևով կամ որ նույնն է՝ (5) բանաձևով,

3) եթե $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, ապա (1) հավասարումն արմատ չունի:

Օրինակ: Լուծենք $x^2 - 8x + 7 = 0$ հավասարումը:

Լուծում: Հաշվենք $\frac{D}{4}$-ը՝

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-4)^2 - 7 = 9 > 0$$

Հավասարումն ունի երկու արմատ՝

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 4 \pm \sqrt{9} = 4 \pm 3; \; x_1 = 1, x_2 = 7:$$

Պատ.՝ 1 և 7:

Առաջադրանքներ

620. Ո՞ր հավասարումն են անվանում բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:

621. Ո՞ր բանաձևով կարելի է գտնել բերված տեսքի քառակուսային հավասարման արմատները, եթե նրա տարբերիչը ոչ բացասական է:

Լուծեք հավասարումը (622-625).

622. ա) $x^2 - 6x + 8 = 0$; բ) $x^2 - 2x - 15 = 0$;
գ) $x^2 + 6x + 8 = 0$; դ) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
ե) $x^2 + 20x + 51 = 0$; զ) $x^2 - 22x - 23 = 0$;
է) $x^2 - 20x + 69 = 0$; ը) $x^2 + 22x + 21 = 0$:

623. ա) $x^2 - 4x + 4 = 0$; բ) $x^2 - 8x + 20 = 0$;
գ) $x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$; դ) $x^2 + 3\frac{1}{3}x + 1 = 0$;
ե) $x^2 + 16x + 48 = 0$; զ) $x^2 - 9x - 22 = 0$;
է) $x^2 + 8x + 71 = 0$ ը) $x^2 + 12x + 40 = 0$:

624. ա) $x^2 - x - 2 = 2$; բ) $x^2 - 5x - 24 = 0$;
գ) $x^2 - 3x + 2 = 0$; դ) $x^2 - 13x + 42 = 0$;
ե) $x^2 + x - 2 = 0$; զ) $x^2 - x - 6 = 0$;
է) $x^2 + 14x + 48 = 0$; ը) $x^2 + 17x + 66 = 0$:

625. ա) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; բ) $2x^2 - 8x - 20 = 0$;
գ) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; դ) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;
ե) $16x^2 + 21x - 22 = 0$; զ) $18x^2 - x - 1 = 0$;
է) $7x^2 - x - 1 = 0$; ը) $14x^2 + 11x - 3 = 0$:

6.6. Վիետի թեորեմը

Դիցուք՝ տված է

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

բերված տեսքի քառակուսային հավասարումը:

Վիետի թեորեմը: ***Եթե բերված տեսքի (1) քառակուսային հավասարման տարբերիչը ոչ բացասական է, ապա այդ հավասարման արմատների գումարը հավասար է x-ի գործակցին վերցված հակադիր նշանով, իսկ արմատների արտադրյալը հավասար է ազատ անդամին:***

Ֆ.Վիետ (1540-1603)

Այլ կերպ ասած, եթե x_1-ը և x_2-ը (1) հավասարման արմատներն են, ապա

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q: \qquad (2)$$

(2) բանաձևերն անվանում են Վիետի բանաձևեր, ի պատիվ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Վիետի (1540-1603):

Դիտողություն 1. Ընդգծենք, որ այստեղ D = 0 դեպքում ենթադրվում է, որ (1) հավասարումն ունի ***երկու համընկնող արմատներ:***

Ապացուցում: Ոչ բացասական տարբերիչի դեպքում (1) հավասարման արմատները հաշվվում են

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (3)$$

բանաձևերով:

Գումարելով (3) հավասարությունները, կստանանք՝

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -p:$$

Բազմապատկելով (3) հավասարությունները և կիրառելով քառակուսիների տարբերության բանաձևը, կստանանք՝

$$x_1x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q:$$

Վիետի թեորեմն ապացուցված է:

Ճիշտ է նաև Վիետի թեորեմի ***հակադարձ թեորեմը՝***

Եթե ինչ-որ x_1, x_2, p, q թվերի համար ճիշտ են (2) բանաձևերը, ապա x_1-ը և x_2-ը (1) հավասարման արմատներն են:

Իրոք, օգտվելով (2) բանաձևերից, կստանանք՝

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q:$$

Այստեղից պարզ է, որ եթե $x^2 + px + q$ եռանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք x_1 կամ x_2, նրա արժեքը հավասար կլինի զրոյի, հետևաբար x_1-ը և x_2-ը

$$x^2 + px + q = 0$$

հավասարման արմատներն են:

Դիտողություն 2: Վիետի թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման համար՝

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0), \tag{4}$$

հաշվի առնելով, որ այն համարժեք է

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

հավասարմանը:

Եթե ընդհանուր տեսքի (4) քառակուսային հավասարումն ունի ոչ բացասական տարբերիչ և եթե x_1-ը և x_2-ը նրա արմատներն են, ապա՝

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}:$$

Վիետի թեորեմը և նրա հակադարձ թեորեմը հաճախ են կիրառվում խնդիրներ լուծելիս:

Օրինակ 1. Գրենք 1 և –3 արմատներ ունեցող բերված տեսքի քառակուսային հավասարում:

Այլ կերպ ասած, գտնենք p և q թվերն այնպես, որ $x^2 + px + q = 0$ հավասարման արմատները լինեն 1 և –3 թվերը:

Ըստ Վիետի թեորեմի՝

$$-p = x_1 + x_2 = -2 \quad \text{և} \quad q = x_1 x_2 = -3$$

Հետևաբար, որոնելի հավասարումն ունի $x^2 + 2x - 3 = 0$ տեսքը:

Օրինակ 2. Առանց լուծելու

$$x^2 - 364x + 497 = 0 \tag{5}$$

հավասարումը, որոշենք նրա արմատների նշանները:

Այս հավասարման տարբերիչը դրական է, քանի որ

$$\frac{D}{4} = 182^2 - 497 > 0:$$

Հետևաբար հավասարումն ունի երկու արմատ՝ x_1 և x_2:

Ըստ Վիետի թեորեմի՝ $x_1 \cdot x_2 = 497$, այսինքն՝ արմատների արտադրյալը դրական է: Նշանակում է՝ արմատներն ունեն նույն նշանը՝ կա՛մ $x_1 > 0$ և $x_2 > 0$, կա՛մ $x_1 < 0$ և $x_2 < 0$:

Բայց, ըստ Վիետի թեորեմի, $x_1 + x_2 = 364$, այսինքն՝ արմատների գումարը նույնպես դրական է: Հետևաբար (5) հավասարումն ունի երկու դրական արմատ:

Օրինակ 3.* Հաշվենք $x_1^2 + x_2^2$ արտահայտության արժեքը, որտեղ x_1-ը և x_2-ը

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad (6)$$

հավասարման արմատներն են:

Սկզբում հաշվենք տարբերիչը՝ $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5$: Ուստի (6) հավասարումը, իրոք, ունի երկու արմատ: Սակայն խնդիրը լուծելու համար դրանք գտնելու անհրաժեշտություն չկա: $x_1^2 + x_2^2$ արտահայտությունը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2:$$

Քանի որ $x_1 + x_2 = -(-3) = 3$ և $x_1x_2 = 1$, ուստի

$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7:$$

Առաջադրանքներ

626. Ձևակերպեք.

ա) Վիետի թեորեմը,

բ) Վիետի թեորեմի հակադարձ թեորեմը:

627. Գրեք Վիետի բանաձևերը:

628. Ապացուցեք Վիետի թեորեմը.

ա) բերված տեսքի քառակուսային հավասարման համար,

բ) ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարման համար:

629. Պարզեք՝ հավասարումն արմատներ ունի՞ (եթե ունի, գտեք նրանց գումարը և արտադրյալը).

ա) $x^2 - x + 1 = 0$; բ) $x^2 + x + 3 = 0$;

գ) $x^2 + 3x - 2 = 0$; դ) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

ե) $x^2 - 2x + 1 = 0$; զ) $x^2 + 4x + 4 = 0$:

630. Կազմեք բերված տեսքի քառակուսային հավասարում, եթե հայտնի են նրա արմատների L գումարը և K արտադրյալը.

ա) $L = 3$, $K = -28$;
բ) $L = -3$, $K = -18$;
գ) $L = -3{,}5$, $K = 2{,}5$;
դ) $L = \frac{5}{6}$, $K = \frac{1}{6}$;
ե) $L = 0$, $K = -9$;
զ) $L = 4$, $K = 4$:

631. Երկու եղանակով կազմեք բերված տեսքի քառակուսային հավասարում, եթե հայտնի են նրա արմատները.

ա) 1 և 5;
բ) -2 և 3;
գ) 4 և 6;
դ) -3 և -6;
ե) 0,5 և 4;
զ) 1,2 և -5;
է) 1 և -1;
ը) 5 և 5:

Օրինակ՝ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$:
1-ին եղանակ՝ $1 \cdot (x - 2)(x - 3) = ... = x^2 - 5x + 6$:
2-րդ եղանակ՝ $p = -(2 + 3) = -5$, $q = 2 \cdot 3 = 6$,
այսինքն՝ որոնելի հավասարումն է՝

$$x^2 - 5x + 6 = 0:$$

632. Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են.

ա) 2 և $\sqrt{3}$;
բ) $\sqrt{3}$ և 5;
գ) $\sqrt{7}$ և $-\sqrt{7}$;
դ) 0 և 5;
ե) $1 - \sqrt{2}$ և $1 + \sqrt{2}$;
զ) $2 - \sqrt{5}$ և $2 + \sqrt{5}$:

633. Առանց լուծելու հավասարումը, որոշեք նրա արմատների նշանները: Այնուհետև, հաշվելով արմատները, ստուգեք լուծումը.

ա) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
բ) $x^2 + 7x + 12 = 0$;
գ) $x^2 + 5x - 14 = 0$;
դ) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
ե) $x^2 + 1{,}27x - 1{,}46 = 0$;
զ) $x^2 - \frac{3}{5}x - 0{,}5 = 0$;
է) $x^2 - 56x + 768 = 0$;
ը) $x^2 - 20x - 684 = 0$;
թ) $x^2 = -377x - 31242$;
ժ) $x^2 + 272x = 49104$:

634. Նշեք քառակուսային հավասարման արմատների գումարը և արտադրյալը (եթե արմատներ գոյություն ունեն).

ա) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
բ) $3x^2 + x + 4 = 0$;
գ) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$;
դ) $1{,}4x^2 - 3x + \frac{5}{7} = 0$;
ե) $0{,}1x^2 - 8x + 4{,}2 = 0$;
զ) $3x^2 + 1{,}1x - 0{,}4 = 0$:

635. Կազմեք 3-ի հավասար երկու համընկնող արմատներ ունեցող բեր- ված տեսքի քառակուսային հավասարում:

636. Հավասարման արմատներից մեկը հավասար է 2-ի: Առանց լուծելու հավասարումը, գտեք նրա երկրորդ արմատը.

ա) $x^2 + 5x = 14$; բ) $x^2 - 13x = -22$;

գ) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$; դ) $x^2 - 1\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0$:

637. Ապացուցեք, որ.
ա) $5x^2 = 8x + 284$ հավասարումը չի կարող ունենալ նույն նշանի ար- մատներ:
բ) $17x^2 = 7x - 354$ հավասարումը չի կարող ունենալ տարբեր նշանի արմատներ:

638. Հայտնի է, որ x_1-ը հավասարման արմատ է: Գտեք հավասարման երկրորդ արմատը և a թիվը.

ա) $2x^2 + 16x + a = 0$, $x_1 = 3$; բ) $3x^2 + ax - 72 = 0$, $x_1 = 8$:

639. Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատները.
ա) հավասար են $3x^2 + 2x - 15 = 0$ հավասարման արմատների գումա- րին և արտադրյալին:
բ) 1-ով մեծ են $3x^2 - 11x + 2 = 0$ հավասարման արմատներից:
գ) Երկու անգամ փոքր են $2x^2 - 13x + 3 = 0$ հավասարման արմատնե- րից:

❖ **640.** ա) x_1-ը և x_2-ը $x_2 - 2000x + 1999 = 0$ հավասարման արմատներն են: Կազմեք քառակուսային հավասարում, որի արմատներն են $-x_1$-ը և $-x_2$-ը:

բ) բանավոր լուծեք քառակուսային հավասարումները.

$x^2 + 2000x - 2001 = 0$, $x^2 - 2000x - 2001 = 0$

$x^2 - 2001x + 2000 = 0$, $x^2 + 2001x + 2000 = 0$:

❖ **641.** $x^2 + 3x - 1 = 0$ հավասարումն ունի երկու արմատ՝ x_1 և x_2: Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $x_1 + x_2$; բ) $x_1 \cdot x_2$; գ) $(x_1 + x_2)^2$;

դ) $x_1^2 + x_2^2$; ե) $x_1^3 + x_2^3$; զ) $(x_1 - x_2)^2$:

6.7. Քառակուսային հավասարումների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

Խնդիր 1. Երկու հաջորդական բնական թվերի քառակուսիների գումարը 54-ով մեծ է նրանց արտադրյալից: Գտեք այդ թվերը:

Լուծում: Որոնելի բնական թվերից փոքրը նշանակենք x-ով, այդ դեպքում նրան հաջորդող բնական թիվը կլինի $x+1$-ը: Ըստ խնդրի պայմանի՝

$$x^2 + (x+1)^2 - x(x+1) = 57: \qquad (1)$$

Այսպիսով, որոնելի x թիվը պետք է հանդիսանա (1) հավասարման արմատ: (1) հավասարման բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ կողմ և կատարելով ձևափոխություններ, ստանում ենք

$$x^2 + x - 56 = 0 \qquad (2)$$

քառակուսային հավասարումը, որը համարժեք է (1) հավասարմանը: Քանի որ (2) հավասարման տարբերիչը՝ $D = 1 - 4\cdot(-56) = 225 > 0$, ուստի (2) քառակուսային հավասարման արմատները կլինեն.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-1 \pm 15}{2}:$$

Հետևաբար (2) հավասարումը, ուստի նաև նրան համարժեք (1) հավասարումն ունի

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -8 \qquad (3)$$

արմատները: Քանի որ x-ը բնական թիվ է, ուստի այդ երկու արմատներից խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x_1 = 7$-ը:

Պատ.՝ 7 և 8:

Խնդիր 2:* Ապրանքը սկզբում արժեր 2500 դրամ: Նրա գինը երկու անգամ հաջորդաբար իջեցնելուց հետո դարձավ 1800 դրամ: Ընդ որում՝ երկրորդ անգամ իջեցման տոկոսը երկու անգամ մեծ էր, քան առաջին անգամ: Քանի՞ տոկոսով էր իջեցված ապրանքի գինը յուրաքանչյուր անգամ:

Լուծում: Դիցուք՝ առաջին անգամ ապրանքի գինը իջեցվել է x%-ով: Դա նշանակում է, որ առաջին էժանացումից հետո ապրանքի գինը դարձավ

$$2500 - 2500\cdot\frac{x}{100} = 2500\left(1 - \frac{x}{100}\right) \text{ դրամ:}$$

Երկրորդ անգամ ապրանքի գինը իջեցվել է $2x$%-ով: Հետևաբար, երկրորդ իջեցումից հետո ապրանքի գինը դարձավ

$$2500\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right) \text{ դրամ:}$$

Ըստ այն պայմանի, որ երկու իջեցումներից հետո ապրանքի գինը դարձել է 1800 դրամ, կունենանք հետևյալ հավասարումը՝

$$2500\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right) = 1800: \qquad (4)$$

Որոշ ձևափոխություններից հետո ստանում ենք

$$\frac{x^2}{200}-\frac{3x}{4}+7=0 \qquad (5)$$

հավասարումը: Բազմապատկելով այդ հավասարման երկու մասերը 200-ով՝ կստանանք

$$x^2-150x+1400=0 \qquad (6)$$

հավասարումը: Լուծելով (6) հավասարումը՝ կգտնենք նրա $x_1 = 10$ և $x_2 = 140$ արմատները: Քանի որ (5) և (4), (6) և (5) հավասարումները համարժեք են, ուստի (4) հավասարումն ունի նույն արմատները: Քանի որ ապրանքի գինը հնարավոր չէ իջեցնել 140%-ով, ուստի խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x_1 = 10$ թիվը:

Պատ.՝ սկզբում՝ 10%-ով, այնուհետև՝ 20%-ով:

Առաջադրանքներ

⊙ **642.** 10 թիվը ներկայացրեք երկու գումարելիների գումարի տեսքով այնպես, որ այդ գումարելիների արտադրյալը հավասար լինի 21: Գտեք գումարելիները:

643. 14 թիվը ներկայացրեք երկու գումարելիների գումարի տեսքով այնպես, որ այդ գումարելիների արտադրյալը հավասար լինի 36, 75: Գտեք գումարելիները:

644. ա) Երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը 110 է: Գտեք այդ թվերը:
բ) Իրար հաջորդող երկու բնական թվերի արտադրյալը 210 է: Գտեք այդ թվերը:
գ) Բնական թվերից մեկը մեծ է մյուսից 7-ով, իսկ նրանց արտադրյալը հավասար է 44: Գտեք այդ թվերը:
դ) Բնական թվերից մեկը փոքր է մյուսից 12-ով, իսկ նրանց արտադրյալը 448 է: Գտեք այդ թվերը:

645. ա) Գտեք երկու թվեր, որոնց գումարը 20 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 218.

բ) Գտեք երկու թվեր, որոնց գումարը –2 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 34:

646. ա) Երկնիշ թվի[1] թվանշաններից մեկը 2-ով մեծ է մյուսից, իսկ այդ թվի և նրանից թվանշանների տեղափոխությամբ ստացված թվի քառակուսիների գումարը հավասար է 4034: Գտեք այդ թիվը:

բ) Գտեք երկնիշ թիվը, եթե նրա միավորների թվանշանը 4-ով փոքր է տասնավորների թվանշանից, իսկ այդ թվի և նրա թվանշանների գումարի արտադրյալը հավասար է 306:

647. ա) Եթե քառակուսու պարագիծը փոքրացնենք 40-ով, ապա նրա մակերեսը կփոքրանա $\frac{17}{9}$ անգամ: Գտեք սկզբնական քառակուսու պարագիծը:

բ) Ուղղանկյան կողմերից մեկը 11 մ-ով մեծ է մյուսից: Այդ ուղղանկյունը ձևափոխված է նրան հավասարամեծ (այսինքն նույն մակերեսն ունեցող) ուղղանկյան, որի մեծ կողմը դարձել է 10 մ, իսկ փոքր կողմը մեծացել է 2 մ-ով: Որոշեք սկզբնական ուղղանկյան կողմերը և մակերեսը:

գ) Հնարավո՞ր է արդյոք, որ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի երկարությունները լինեն. 1) իրար հաջորդող երեք բնական թվեր, 2) երեք իրար հաջորդող զույգ թվեր, 3) երեք իրար հաջորդող կենտ թվեր:

դ) Ո՞ր ուռուցիկ բազմանկյան կողմերի թիվը հավասար կլինի նրա անկյունագծերի թվին:

648. ա) Ավարտական դասարանի աշակերտներից յուրաքանչյուրը որոշեց փոխանակել իր լուսանկարը մյուսների հետ: Քանի՞ աշակերտ կար դասարանում, եթե պահանջվեց 930 լուսանկար:

բ) Մի քանի մարդ հանդիպելիս միմյանց ողջունեցին ձեռքսեղմումով: Քանի՞ մարդ էին հանդիպել, եթե ձեռքսեղմումների թիվը 21 է:

649. ա) Ուղղանկյան բարձրությունը նրա հիմքի 75%-ն է: Գտեք այդ ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 48 մ^2 է:

բ) Քառակուսու ձև ունեցող թիթեղից կտրեցին 3 սմ լայնությամբ շերտ, որից հետո թիթեղի մնացած մասի մակերեսը դարձավ 10 սմ^2: Գտեք թիթեղի սկզբնական չափերը:

(1) Երկնիշ թիվն ընդունված է նշանակել $\overline{ab} = 10a + b$: Նման կերպ, եռանիշ թիվը՝ $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, քառանիշ թիվը՝ $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ և այլն:

❖ **650.** Առևտրի կենտրոնը տվյալ ապրանքը գնում է 800 դրամով և վաճառում՝ բարձրացնելով գինը որոշակի տոկոսով: Խանութն այդ ապրանքը գնում է առևտրի կենտրոնից և վաճառում՝ բարձրացնելով գինը 1,5 անգամ ավելի տոկոսով, քան բարձրացրել էր առևտրի կենտրոնը: Արդյունքում խանութում ապրանքի գինը դարձել է 1248 դրամ: Քանի՞ տոկոսով է բարձրացրել ապրանքի գինը առևտրի կենտրոնը և քանի՞ տոկոսով՝ խանութը:

❖ **651.** Ապրանքի գինը 500 դրամ է: Երկու թանկացումներից հետո նրա գինը դարձավ 546 դրամ: Հայտնի է, որ երկրորդ անգամ թանկացման տոկոսը 1-ով փոքր է, քան առաջին անգամ թանկացման տոկոսը: Քանի՞ տոկոսով բարձրացվեց ապրանքի գինը յուրաքանչյուր անգամ:

652. Ծառայողի աշխատավարձը բարձրացրին երկու անգամ, ընդ որում՝ երկրորդ անգամ բարձրացման տոկոսը երկու անգամ մեծ է, քան առաջին անգամ էր: Որոշեք, թե քանի՞ տոկոսով է բարձրացվել աշխատավարձը յուրաքանչյուր անգամ, եթե մինչև առաջին բարձրացումը աշխատավարձը 140000 դրամ էր, իսկ երկրորդ բարձրացումից հետո՝ 184800 դրամ:

653. Երկու հաջորդական բնական թվերի արտադրյալը նրանց գումարից մեծ է 109-ով: Գտեք այդ թվերը:

654. Գտեք ուղղանկյան պարագիծը, եթե նրա կողմերից մեկը մյուսից մեծ է 4 սմ-ով, իսկ մակերեսը 60 սմ^2 է:

655. Երեք հաջորդական ամբողջ թվերի քառակուսիների գումարը 302 է: Գտեք այդ թվերը:

656. ***Հնագույն խնդիր:*** Իր տարիքի մասին հարցին մի տիկին պատասխանեց. «Եթե իմ տարիքն արտահայտող թիվը բարձրացվի քառակուսի կամ բազմապատկվի 53-ով և արդյունքից հանվի 696, ապա կստացվի միևնույն թիվը»: Քանի՞ տարեկան է տիկինը:

Պատմական ակնարկ

Դեռևս բաբելացիները կարողանում էին լուծել քառակուսային հավասարումներ: Դա կապված էր հողատարածությունների մակերեսների հաշվման խնդիրների, ինչպես նաև աստղագիտության զարգացման հետ:

Սակայն բաբելացիների մոտ բացասական թվի գաղափարը դեռևս չկար և այդ պատճառով էլ քառակուսային հավասարման արմատները կարող էին լինել միայն դրական թվեր:

Ալեքսանդրիացի հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի (III դար), «Թվաբանություն»-ում չկա հանրահաշվի համակարգված շարադրանք, սակայն այնտեղ ընդգրկվել են մի շարք խնդիրներ, որոնք լուծվում են հավասարումներ կազմելու օգնությամբ:

Օրինակ՝ հետևյալ խնդիրը.

Գտնել երկու թվեր, որոնց գումարը 20 է, իսկ արտադրյալը՝ 96:

Եթե անհայտ թվերից մեկը նշանակենք y-ով, ապա կստանանք

$$y(20 - y) = 96$$

քառակուսային հավասարումը:

Ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարում լուծելուց խուսափելու համար Դիոֆանտը անհայտ թվերը նշանակում է $10 + x$ և $10 - x$: Նրանց գումարը հավասար է $10 + x + (10 - x) = 20$:

Կազմենք հավասարում և լուծենք այն՝

$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$

$$100 - x^2 = 96,$$

$$x^2 = 4:$$

Դիոֆանտի ժամանակներում դեռ չգիտեին բացասական թվեր, դրա համար էլ Դիոֆանտը նշում է միայն $x = 2$ արմատը: Այդ դեպքում անհայտ թվերը հավասար են $10 + 2 = 12$ և $10 - 2 = 8$:

Քառակուսային հավասարման բերվող խնդիրներ հանդիպում են հնդիկ մաթեմատիկոսների աշխատանքներում դեռևս մ.թ. V դարում: Ահա XIIդ. հնդիկ մաթեմատիկոս Բհասկարայի մի խնդիր՝

Կապիկները աշխույժ խմբով միասին
Ուրախ խաղում, թռչկոտում են թև թևի:
Քառակուսին նրանց ութերորդ մասի զվարճանում էր հովտի մեջ ներքևի,
Իսկ տասներկուսը նրանցից բաղեղներին ճոճվում էր անվախ.
Քանի՞սն են, դե՛, ասա՛ ինձ, կապիկներն այս ուրախ:

(Թարգմ. Լ. Թեյլանի)

Այս խնդրին համապատասխանում է

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

քառակուսային հավասարումը:

Քառակուսային հավասարումները մեկնաբանվում են նաև ուզբեկ մաթեմատիկոս Ալ-Խորեզմիի «Հանրահաշիվ» տրակտատում, այնտեղ բերվում են նաև դրանց լուծման եղանակները:

Միայն XVII դարում, հիմնականում շնորհիվ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ֆ.Վիետի (1540-1603) հետազոտությունների, առաջին անգամ 2-րդ աստիճանի, ինչպես նաև 3-րդ և 4-րդ աստիճանի հավասարումները սկսեցին դիտարկել տառային նշանակումներով: Հենց Վիետը առաջին անգամ տառային նշանակումներ մտցրեց ոչ միայն անհայտ մեծությունների, այլ նաև տրվածների, այսինքն` գործակիցների համար: Վիետը հատկապես շատ էր գնահատում իր հայտնագործած բանաձևերը, որոնք այժմ կոչվում են Վիետի բանաձևեր: Սակայն Վիետը ընդունում էր միայն դրական արմատները:

Միայն XVII դարում Դեկարտի, Նյուտոնի և այլ մաթեմատիկոսների աշխատանքների շնորհիվ քառակուսային հավասարումների լուծումն ընդունեց ժամանակակից տեսք:

Դեռ հնում մաթեմատիկոսները խնդիրներ լուծելիս առնչվում էին բացասական թվից քառակուսի արմատ հանելու հետ. այդ դեպքում խնդիրը համարվում էր անլուծելի: Սակայն աստիճանաբար պարզվեց, որ իրական թվերով տրված շատ խնդիրների լուծումը ստանում է պարզ բացատրություն

$$a + b\sqrt{-1}$$

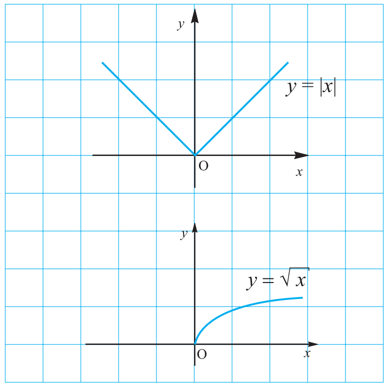
արտահայտությունների օգնությամբ, որոնք ի վերջո նույնպես սկսեցին անվանել թվեր, բայց արդեն` ***կոմպլեքս:***

Կոմպլեքս թվերի հետ պարզագույն գործողություններ կատարելու առաջին հիմնավորումը տվեց իտալացի մաթեմատիկոս Ռ. Բոմբելլին 1572թ., թեև երկար ժամանակ կոմպլեքս թվերին վերաբերվում էին որպես ինչ-որ գերբնական բանի: Լ. Էյլերը կոմպլեքս թվերի տեսության հարցերում էական ներդրում կատարեց: Նրա աշխատանքներից հետո կոմպլեքս թվերը վերջնական ճանաչում ստացան` որպես ուսումնասիրության առարկա և միջոց: «Կոմպլեքս թիվ» անվանումը առաջարկվել է գերմանացի մեծ մաթեմատիկոս Կ. Գաուսի կողմից 1831թ.:

Ներկայումս կոմպլեքս թվերը լայնորեն օգտագործվում են ֆիզիկայում և տեխնիկայում:

ԳԼՈՒԽ 7

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԳՐԱՖԻԿՆԵՐԸ



7.1. $y = |x|$ ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը

Դիտարկենք $y = |x|$ բանաձևով տրված ֆունկցիան:

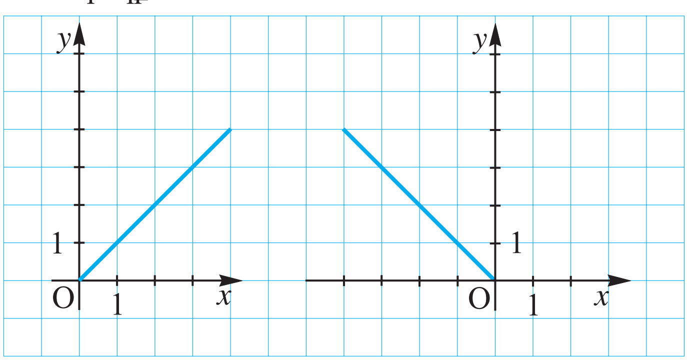
Քանի որ ըստ մոդուլի սահմանման՝

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ եթե } x \leqslant 0, \end{cases}$$

ուստի այդ ֆունկցիան կարելի է գրառել այսպես՝

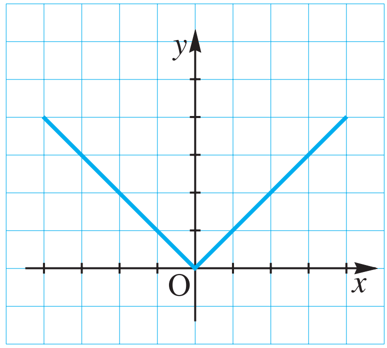
$$y = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ եթե } x \leqslant 0: \end{cases}$$

Նկ. 38 ա-ում պատկերված է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \geqslant 0$ դեպքում, իսկ նկ. 38 բ-ում՝ $x \leqslant 0$ դեպքում:



ա) բ)

Նկ. 38



Նկ. 39

Հետևաբար, $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջությամբ ունի նկ. 39-ում պատկերված տեսքը:

Ձևակերպենք $y = |x|$ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունները.

1) որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար,

2) ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ,

3) $[0; +\infty)$ միջակայքում աճող է, իսկ $(-\infty; 0]$ միջակայքում՝ նվազող:

4) զույգ ֆունկցիա է՝ $|-x| = |x|$:

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Կառուցենք $y = |2x + 3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ըստ մոդուլի սահմանման՝

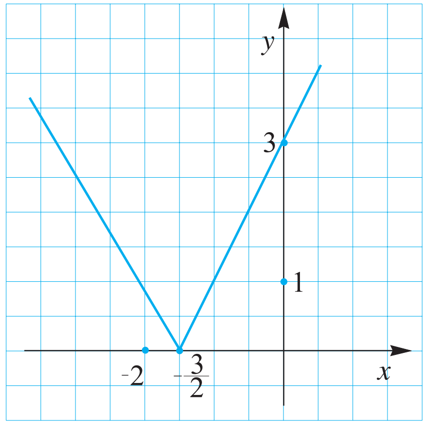
$$|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3, \text{ եթե } 2x + 3 \geqslant 0, \\ -(2x + 3), \text{ եթե } 2x + 3 \leqslant 0: \end{cases}$$

Ուստի կարելի է վարվել այնպես, ինչպես $|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս: Այսինքն միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցել $y = 2x + 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$ արժեքների համար, և $y = -2x - 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ արժեքների համար: Ինչպես գիտենք, գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է կառուցել նրա գրաֆիկին պատկանող երկու կետ:

$y = 2x + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ միջակայքում կառուցելու համար վերցնենք x-ի երկու արժեքներ՝ $-\dfrac{3}{2}$ և 0: Եթե $x = -\dfrac{3}{2}$, ապա $y = 0$, իսկ եթե $x = 0$, ապա $y = 3$: $y = -2x - 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\left(+\infty; -\dfrac{3}{2}\right]$ միջակայքում կառուցելու համար x-ին տանք այդ միջակայքին պատկանող $-\dfrac{3}{2}$ և -2 արժեքները:

Եթե $x = -\dfrac{3}{2}$, ապա $y = 0$, իսկ եթե $x = -2$, ապա $y = 1$:

Այդ կետերի օգնությամբ ստանում ենք նկ. 40-ում պատկերված գրաֆիկը:



Նկ. 40

Օրինակ 2. Կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը՝

$$y = -2|-3x + 1| + 5:$$

Նորից օգտվելով մոդուլի սահմանումից՝ ստանում ենք՝

$$-2|-3x + 1| + 5 = \begin{cases} -2(-3x + 1) + 5 = 6x + 3, \text{ եթե } -3x + 1 \geqslant 0, \\ 2(-3x + 1) + 5 = -6x + 7, \text{ եթե } -3x + 1 \leqslant 0: \end{cases}$$

Նշանակում է՝ պետք է կառուցել $y = 6x + 3$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը $(-\infty; \frac{1}{3}]$ միջակայքում և $y = -6x + 7$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ $[\frac{1}{3}; +\infty)$ միջակայքում: Դա կարելի է անել, ինչպես նախորդ օրինակում: Գրաֆիկի կառուցումը կատարեք ինքնուրույն:⌋

Առաջադրանքներ

657. Բացատրեք՝ ինչպե՞ս եք հասկանում գրառումը՝

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \geqslant 0 \\ x, \text{ եթե } x \leqslant 0: \end{cases}$$

658. Պարզեցրեք $|x|$ արտահայտությունը տրված պայմանի դեպքում.
ա) $x \geqslant 0$;   բ) $x > 0$,   գ) $x \leqslant 0$,   դ) $x < 0$,   ե) $x = 0$:

659. Կառուցեք $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և ձևակերպեք այդ ֆունկցիայի հատկությունները:

660. Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = 2|x|$, բ) $y = -3|x|$,

⌈գ) $y = \frac{1}{2}|3x - 3|$, դ) $y = -\frac{1}{2}|4x + 1|$,

ե) $y = 2|5x - 1|$, զ) $y = 3|-x - 4| - 2$:⌋

661. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ եթե } x \geqslant 0, \\ -2, \text{ եթե } x < 0; \end{cases}$ բ) $y = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x > 0 \\ 0, \text{ եթե } x = 0 \\ -1, \text{ եթե } x < 0: \end{cases}$

7.2. $y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները

Որոշակիության համար նախ դիտարկենք $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան:

$y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան որոշված է զրոյից տարբեր ցանկացած x իրական թվի համար, այլ կերպ ասած՝ $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը զրոյից տարբեր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է:

Նախ այս ֆունկցիան դիտարկենք միայն դրական x-երի համար: Նշենք նրա հետևյալ հատկությունները.

1) *Եթե* $x > 0$, *ապա* $y > 0$:

2) *Դրական x-երի համար ֆունկցիան նվազող է, այսինքն արգումենտի մեծ արժեքին համապատասխանում է ֆունկցիայի փոքր արժեք,* այսինքն՝ եթե $0 < x_1 < x_2$, ապա $y_1 > y_2$, որտեղ

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2}:$$

Ապացուցենք այս պնդումները:

$x > 0$ դեպքում $\frac{1}{x}$ կոտորակի և՛ համարիչը, և՛ հայտարարը դրական թվեր են, դրա համար էլ

$$y = \frac{1}{x} > 0:$$

Դիցուք` x_1 և x_2 դրական թվերի համար տեղի ունի $x_1 < x_2$ անհավասարությունը: Այդ դեպքում, ըստ թվային անհավասարությունների 5-րդ հատկության (տես կետ 1.1), եզրակացնում ենք, որ $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, այսինքն $y_1 > y_2$:

3)* *Եթե x-ը, դրական մնալով, ձգտում է զրոյի, ապա $y = \frac{1}{x}$-ը ձգտում է $+\infty$, իսկ եթե x-ը ձգտում է $+\infty$, ապա $y = \frac{1}{x}$-ը ձգտում է զրոյի,* այսինքն`

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty, \text{ երբ } x \to 0 \ (x > 0),$$

$$y = \frac{1}{x} \to 0, \text{ երբ } x \to +\infty:$$

Այս հատկությունը լուսաբանենք օրինակով:

Եթե դրական x-ը ձգտում է զրոյի` ընդունելով $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ արժեքները, ապա $y = \frac{1}{x}$-ն ընդունում է համապատասխանաբար 1, 2, 3, 4, 5, ... արժեքները, այսինքն` $y \to +\infty$:

Իսկ եթե $x \to +\infty$, ընդունելով 1, 2, 3, 4, ... արժեքները, ապա y-ը համապատասխանաբար ընդունում է $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ արժեքները, այսինքն` ձգտում է զրոյի:

4) *Դրական x-երի համար $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է, այսինքն արգումենտի փոքր փոփոխությանը համապատասխանում է y ֆունկցիայի փոքր փոփոխություն:*

Լուսաբանենք այս հատկությունը օրինակով:

Դիցուք` մարզիկը պետք է վազի 1 կմ: Կհամարենք, որ տարածությունը նա անցնում է V կմ/վրկ հաստատուն արագությամբ: Այդ դեպքում ամբողջ ճանապարհը նա կանցնի $t$ վրկ-ում, ընդ որում`

$$t = \frac{1}{\mathrm{V}}: \qquad (1):$$

Այստեղ t ժամանակը V արագության ֆունկցիա է: Ակնհայտ է, որ արագության փոքր փոփոխությունը բերում է ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսած ժամանակի փոքր փոփոխության: Ուստի (1) բանաձևով տրված ֆունկցիան անընդհատ է (հիշեցնենք` (1) բանաձևում $\mathrm{V} \neq 0$): Այս հատկության շնորհիվ դրական $x$-երի համար $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անընդհատ գիծ է, այսինքն` այն կարելի է նկարել մատիտի անընդհատ շարժումով:

Առաջադրանքներ

662. ա) Ո՞ր x-երի համար է որոշված $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան:

բ) $(0; +\infty)$ միջակայքում $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազո՞ղ է:

գ) Ինչի՞ է ձգտում $y=\frac{1}{x}$ -ը, երբ դրական x-ը ձգտում է զրոյի:

դ) Ինչի՞ է ձգտում $y=\frac{1}{x}$ -ը, երբ x-ը ձգտում է $+\infty$-ի:

ե) $(0; +\infty)$ միջակայքում $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհա՞տ է:

663. Ուղղանկյան մակերեսը 1մ^2 է:
ա) Ի՞նչ արժեքներ կարող են ընդունել նրա կողմերը: Բերեք օրինակներ:

բ) Գտեք այդ ուղղանկյան կողմերը, եթե նրանցից մեկի երկարությունը հավասար է՝ 2 մ, 3 մ, $\frac{1}{4}$ մ, $\frac{1}{5}$ մ:
գ) Կազմեք այդ ուղղանկյան կողմերի երկարությունների կապն արտահայտող բանաձև:

664. ա) Եթե հավասարաչափ շարժման արագությունը մեծացվի 2 անգամ, ինչպե՞ս կփոխվի տրված հեռավորությունն անցնելու ժամանակը:
բ) Եթե գազով լցված ծավալը փոքրացվի 4 անգամ, ինչպե՞ս կփոխվի գազի խտությունը:
գ) Եթե մեկ դետալի պատրաստման ժամանակը փոքրացվի 3 անգամ, ինչպե՞ս կփոխվի հերթափոխի ընթացքում պատրաստված դետալների թիվը:

665. Հաշվեք $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները, երբ x-ը հավասար է 1, 2, 3, 4, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$: Արդյունքները լրացրեք աղյուսակով:

666. Տված է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան: Գտեք.
ա) $y(1)$; բ) $y(2)$; գ) $y(3)$;

դ) $y(6)$;   ե) $y\left(\frac{1}{2}\right)$;   զ) $y\left(\frac{1}{3}\right)$;

է) $y\left(\frac{1}{6}\right)$;   ը) $y\left(\frac{1}{10}\right)$:

667. Համեմատեք կոտորակները.

ա) $\frac{1}{2}$ և $\frac{1}{3}$;   բ) $\frac{1}{5}$ և $\frac{1}{3}$;

գ) $\frac{1}{4}$ և $\frac{1}{3}$;   դ) $\frac{1}{10}$ և $\frac{1}{11}$:

668. Տրված է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան: Համեմատեք թվերը.

ա) $y(1)$ և $y(2)$;   բ) $y(2)$ և $y(3)$;

գ) $y(1)$ և $y(5)$;   դ) $y(1)$ և $y(3)$;

ե) $y(12)$ և $y(5)$;   զ) $y(4)$ և $y(3)$:

7.3. $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Նախ կառուցենք $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը դրական x-երի համար:

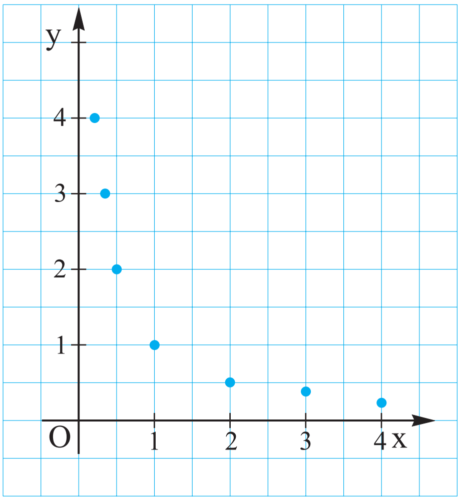
Ընտրենք մեծ թվով դրական x-ի արժեքներ և հաշվենք $y=\frac{1}{x}$ բանաձևով դրանց համապատասխան y-ների արժեքները:

xOy կոորդինատային համակարգում նշենք համապատասխան $(x; y)$ թվազույգերը (նկ. 41): Միացնենք այդ կետերը սահուն, անընդհատ գծով, այնպես, որ նրա շարժական կետի y օրդինատը նվազի նրա աբսցիսի աճմանը զուգընթաց (նկ. 42):Ստացված անընդհատ կորը կարելի է դիտարկել որպես $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկ դրական x-երի համար:

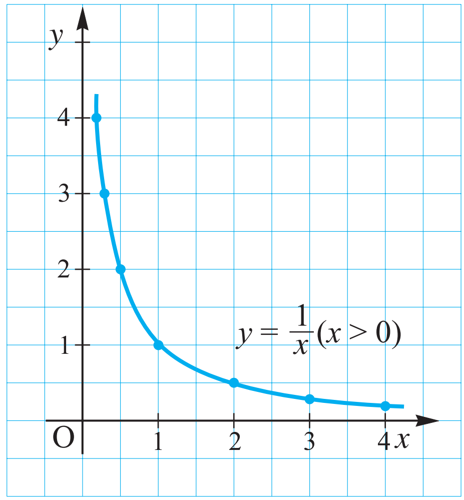
Նշենք, որ նկ. 42-ում պատկերված գրաֆիկն արտացոլում է նախորդ կետում նշված $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի 1, 2, 3, 4 հատկությունները:

Իրոք, $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը դրական x-երի համար դասավորված է Ox առանցքից վերև, ինչը և համապատասխանում է 1-ին հատկությանը:

Եթե գրաֆիկով շարժվող կետի աբսցիսը մեծանում է, ապա նրա y օրդինատը փոքրանում է, ինչը և համապատասխանում է 2-րդ հատկությանը:



Նկ. 41



Նկ. 42

3-րդ հատկությունը կայանում է նրանում, որ եթե $x \to +\infty$, ապա $y \to 0$, իսկ եթե $x \to 0 (x > 0)$, ապա $y \to +\infty$: Այս հատկությունը նույնպես ինչ-որ չափով արտացոլված է նկ. 42-ում:

Վերջապես 4-րդ հատկության հիման վրա գրաֆիկը պետք է անընդհատ գիծ լինի, դրա համար էլ մենք ստացված կետերը միացրինք չընդհատվող, սահուն գծով:

$y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը զրոյից տարբեր թվերի բազմությունն է: Այդ բազմությունը համաչափ է զրոյական կետի նկատմամբ: Բացի դրանից, այդ բազմության ցանկացած x-ի համար տեղի ունի

$$y(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -y(x) \qquad (1)$$

հավասարությունը, այսինքն՝ x-ի նշանը փոխելով հակադիրով՝ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքի նշանը նույնպես փոխվում է հակադիրով:

Այդպիսի հատկությամբ օժտված ֆունկցիան անվանում են ***կենտ ֆունկցիա:***

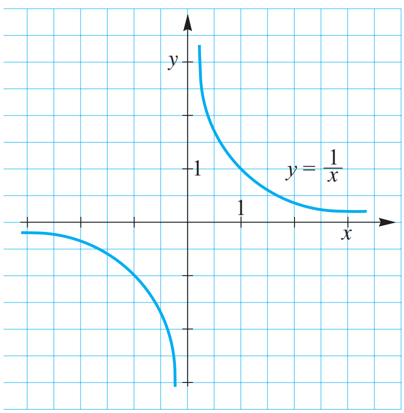
$y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիան կենտ ֆունկցիա է: Համաձայն (1) հավասարության $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի x և $-x$ աբսցիսներն ունեցող կետերն ունեն հակադիր օրդինատներ, դրա համար էլ $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Ուստի բացասական x-երի համար

$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համապատասխան մասը կառուցելու համար պետք է պատկերել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ արդեն կառուցված գծին համաչափ գիծ:

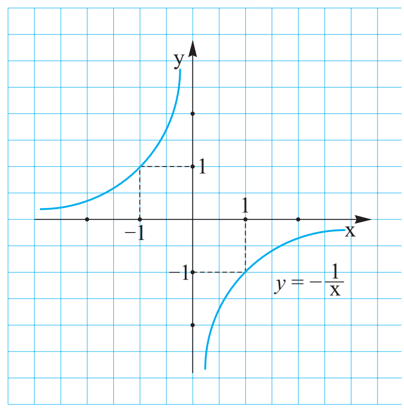
$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 43-ում:

*$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկ հանդիսացող գիծը անվանում են **հիպերբոլ:***

Նշենք, որ $y=\dfrac{1}{x}$ հիպերբոլը բաղկացած է երկու մասից, որոնց անվանում են ***հիպերբոլի ճյուղեր:*** Դրանցից մեկը դասավորված է Ox առանցքի դրական ճառագայթից վերև, մյուսը՝ Ox առանցքի բացասական ճառագայթից ներքև:



Նկ. 43



Նկ. 44

$y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից երևում է, որ բացասական x-երի համար $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1) *եթե $x<0$, ապա $y<0$:*

2) $(-\infty;\ 0)$ *միջակայքում $y=\dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազող է:*

3) *Եթե բացասական x-ը ձգտում է զրոյի, ապա $y=\dfrac{1}{x}$-ը ձգտում է $-\infty$, իսկ եթե x-ը ձգտում է $-\infty$, ապա $y=\dfrac{1}{x}$-ը ձգտում է զրոյի:*

4) $(-\infty;\ 0)$ *միջակայքում $y=\dfrac{1}{x}$-ն անընդհատ է:*

Այս հատկությունների ապացուցումները մենք բաց ենք թողնում:

Ճիշտ նույն ձևով կառուցվում է նաև $y=\dfrac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ k-ն տրված թիվ է:

$k<0$ դեպքում $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ կառուցում ենք $y=-\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը այնուհետև նրա ճյուղերը համաչափ արտապատկերում Ox առանցքի նկատմամբ:

Օրինակ՝ $y=-\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է նկ. 43-ում պատկերված $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ այն համաչափ արտապատկերելով Ox առանցքի նկատմամբ (նկ. 44):

Նշենք նաև, որ ցանկացած $k\neq 0$ թվի դեպքում $y=\frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են ***հիպերբոլ:***

Առաջադրանքներ

669. ա) Ո՞րն է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

բ) Ինչպե՞ս են անվանում $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

գ) Քանի՞ ճյուղ ունի հիպերբոլը:

դ) $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան անընդհա՞տ է, կե՞նտ է:

670. Տրված է $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան: Ի՞նչ նշանով արժեքներ է ընդունում y-ը եթե $x>0$, եթե $x<0$: Հաշվեք.

ա) $y(1)$, $y(3)$, $y(5)$, $y(10)$; բ) $y(1)$, $y(-2)$, $y(-8)$, $y(-9)$;

գ) $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(1\frac{1}{2}\right)$; դ) $y(1{,}5)$, $y\left(-5\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-3\frac{1}{3}\right)$:

671. ա) $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $[1;+\infty]$, $[0;1]$, $(-\infty;0)$ միջակայքերում աճո՞ղ է, թե՞ նվազող:

բ) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան որոշված չէ: Կարո՞ղ է այդ ֆունկցիան ընդունել 0 արժեք:

672. Ապացուցեք, որ $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան.

ա) կենտ է;   բ) նվազող է $(-\infty;\ 0)$ միջակայքում:

673. Դասավորեք $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի արժեքները աճման կարգով.

$y(1),\ y(-3),\ y(1{,}5),\ y(-1),\ y(3),\ y\left(\dfrac{2}{3}\right),\ y(-0{,}8),\ y\left(-\dfrac{1}{3}\right),\ y\left(5\dfrac{1}{2}\right)$:

674. Տրված է $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան: Կոորդինատային համակարգում, որտեղ առանցքների վրա միավոր հատվածները 1 սմ են, կառուցեք $\left(x;\ \dfrac{1}{x}\right)$ կետերը, որտեղ x-ը հավասար է $1, 2, 3, 4, 1\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$:
Միացրեք ստացված կետերն անընդհատ գծով: Այդ գծի վրա նշեք $5, 6, 7, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{7}$ աբսցիսներով կետերը:
Օգտագործելով կառուցված գիծը և $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի կենտությունը՝ կառուցեք հիպերբոլի ձախ ճյուղը:

675. $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ նշեք.

ա) y-ի արժեքները, եթե x-ը հավասար է 0,2; 0,3; 0,8:
բ) y-ի արժեքները, եթե x-ը հավասար է $-3{,}5;\ -1{,}8;\ -0{,}4$:
գ) x-ի արժեքները, եթե $y(x) = 3,\ y(x) = 5,\ y(x) = -2$:
դ) y-ի արժեքները, եթե $x > 0,\ x > 2,\ x < -3$:
ե) y-ի արժեքները, եթե $0 < x < 1,\ -3 < x < -1$:

676. Պատկանո՞ւմ է արդյոք նշված կետը $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին.

ա) A(2; 0,5);   բ) B(4; –1);
գ) C(–25; – 0,04);   դ) D(6; 0,7):

❖ **677.** $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;\ 0)$ միջակայքում, ինչպես նաև $(0;\ +\infty)$ միջակայքում: Բայց այդ ֆունկցիան նվազող չէ իր որոշման տիրույթում: Բացատրեք՝ ինչո՞ւ:

678. Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկը.

ա) $y = -\frac{1}{x}$; բ) $y = \frac{2}{x}$;

գ) $y = -\frac{2}{x}$; դ) $y = \frac{6}{x}$;

ե) $y = -\frac{8}{x}$; զ) $y = \frac{4}{x}$:

679. Ո՞ր կոորդինատային քառորդներում են դասավորված $y = \frac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերը. ա) $k > 0$, բ) $k < 0$ դեպքում:

7.4. $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան և նրա գրաֆիկը

Յուրաքանչյուր ոչ բացասական x թվի համապատասխանության մեջ դնենք նրա թվաբանական արմատին հավասար y թիվը: Այլ կերպ ասած՝ ոչ բացասական թվերի բազմության վրա տանք

$$y = \sqrt{x} \qquad (1)$$

ֆունկցիան:

Այսպիսով, (1) ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ոչ բացասական թվերի բազմությունն է:

Նշենք (1) ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները.

1) Եթե $x = 0$, ապա $y = 0$:

2) Եթե $x > 0$, ապա $y > 0$:

3) $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան աճող է:

4) Եթե $x \to +\infty$, ապա $y \to +\infty$:

5) $y = \sqrt{x}$-ն անընդհատ ֆունկցիա է:

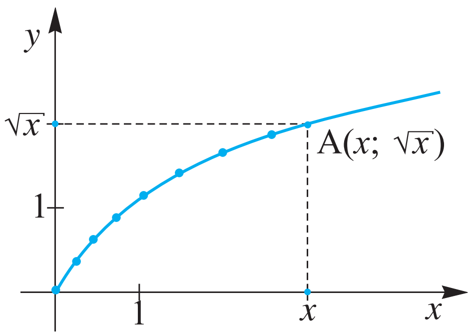
1-ին հատկությունը հետևում է այն բանից, որ 0-ի թվաբանական արմատը 0 է:

2-րդ հատկությունը հետևում է նրանից, որ դրական թվի թվաբանական արմատը դրական է:

3-րդ հատկությունը հետևում է 3.2 կետում նշված թվաբանական արմատի հատկությունից:

Եթե x-ը ձգտում է պլյուս անվերջի՝ ընդունելով $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, m^2, \ldots$ արժեքներ, ապա $y = \sqrt{x}$-ն ընդունում է $1, 2, 3, 4, \ldots m, \ldots$ արժեքները: Ակնհայտ է, որ այն նույնպես ձգտում է պլյուս անվերջի: x-ի այդպիսի այլ արժեքների համար այդ հատկությունը պահպանվում է: Անցնենք $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցմանը:

x-ին տալով մի քանի հարմար արժեքներ (հնարավորինս՝ շատ քանակով) օրինակ՝ 0; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{4}$; 1; 1,44; 2,25; 4, ... : Ստացված $(x;\sqrt{x})$ կետերը պատկերենք կոորդինատային հարթության վրա: Այնուհետև նշված կետերը միացնենք սահուն գծով (նկ. 45): Առաջացած գիծն $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի մոտավոր պատկերն է:



Նկ. 45

Հեշտ է տեսնել, այդ գրաֆիկն արտացոլում է 1) - 5) հատկությունները:

Իրոք, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով. դա 1-ին հատկությունն է:

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն $x > 0$ դեպքում դասավորված է Ox առանցքից վերև. դա 2-րդ հատկությունն է:

Գրաֆիկը պատկերում է աճող ֆունկցիա. դա 3-րդ հատկությունն է:

$x \to +\infty$ դեպքում գրաֆիկի համապատասխան կետերի օրդինատները անսահման մեծանում են (հատկություն 4):

Ֆունկցիայի գրաֆիկն անընդհատ կոր է (5-րդ հատկություն):

Նշենք $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի ևս երկու հատկություն.

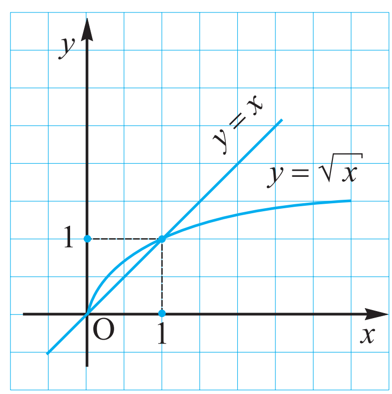
ա) եթե $0 < x < 1$, ապա $x < \sqrt{x}$:

Իրոք, $x < 1$ անհավասարության երկու մասը բազմապատկելով $x > 0$ թվով, ստանում ենք $x^2 < x$, որտեղից, հաշվի առնելով $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի աճող լինելը, ստանում ենք՝ $\sqrt{x^2} < \sqrt{x}$ այսինքն՝ $x < \sqrt{x}$:

Նույն ձևով ցույց է տրվում հետևյալ հատկության ստույգությունը՝

բ) եթե $x > 1$, ապա $x > \sqrt{x}$:

Այս հատկություններից հետևում է, որ $(0;\ 1)$ միջակայքում $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև, իսկ $(1;\ +\infty)$ միջակայքում այն դասավորված է $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև (նկ. 46):



Նկ. 46

Առաջադրանքներ

680. ա) Ո՞րն է $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

բ) Թվարկեք $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի հատկությունները:

681. Օգտագործելով $y=x^2 (x \geqslant 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ մոտավորապես որոշեք $\sqrt{y}$-ը՝ y-ի հետևյալ արժեքների համար.
ա) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
բ) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5:

682. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $x=2y$; բ) $x=-5y$; գ) $x=y^2$, դ) $x=2y-4$,
ե) $x=y+5$, զ) $x=2y^2$, $y \geqslant 0$ դեպքում:

683. Օգտագործելով $y=x$ և $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, բաղդատեք հետևյալ թվերը.

ա) 2 և $\sqrt{2}$ բ) 3 և $\sqrt{3}$ գ) 0,5 և $\sqrt{0{,}5}$, դ) $\frac{1}{7}$ և $\sqrt{\frac{1}{7}}$:

684. Օգտագործելով $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ցույց տվեք, որ.

ա) $\sqrt{10} > \sqrt{5}$; բ) $\sqrt{7} > \sqrt{4}$;
գ) $\sqrt{0{,}5} > \sqrt{0{,}4}$; դ) $\sqrt{0{,}9} > \sqrt{0{,}4}$:

685. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\sqrt{|x|}$; բ) $y=|\sqrt{x}-1|$; գ) $y=-\sqrt{x}$;
դ) $y=\sqrt{-x}$; ե) $y=-\sqrt{-x}$; զ) $y=\sqrt{x-4}$:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Գտեք թվային արտահայտության արժեքը (686-691).

686. ա) $(+1) + (-2) + (-4) + (+5)$;
բ) $(-3) + (+1) + (-2) + (-3) + (+4) + (+3)$;
գ) $(8{,}24 - 13{,}73) \cdot \left(0{,}2 - \frac{1}{5}\right)$;
դ) $0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002$:

687. ա) $48 \cdot (0{,}6 \cdot 5 - 2{,}875) \cdot 0{,}25$;
բ) $7 \cdot 4 + (0{,}22 : 11 + 0{,}58)$;
գ) $0{,}09 \cdot 37 - 1{,}37 - 1{,}96$;
դ) $0{,}44 \cdot 25 + 0{,}75 \cdot 3{,}2$;
ե) $(64 \cdot 4 \cdot 0{,}125 - 7{,}8) \cdot 12$:

688. ա) $4{,}575 : 0{,}005 + 8{,}5 : 0{,}1$;
բ) $21{,}5 : (0{,}105 + 0{,}02)$;
գ) $15{,}2 : 1{,}9 + 0{,}51 : 0{,}17 + 0{,}48 : 0{,}08$;
դ) $5 : 4 - 4 : 5 + 0{,}5 : 0{,}4 - 0{,}4 : 0{,}5$:
ե) $4 \cdot \frac{2}{21}\, 10 - 19\frac{20}{21}$;
զ) $24\frac{8}{41} : 4 - 18\frac{5}{41} : 3$;

689. ա) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 3\frac{1}{6}$;
բ) $\left(\frac{2}{15} + 1\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2 : 2\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}$;
գ) $\left(\frac{1}{2} + 0{,}8 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(3 + 5\frac{8}{25} - 0{,}12\right)$;
դ) $\left(2\frac{3}{4} + 0{,}15 - 1\frac{8}{25}\right) : \left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} + 0{,}04\right)$;
ե) $\left(2{,}214 - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{50} + \left(1\frac{11}{16} + 0{,}7125\right) : 3$;
զ) $1{,}456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0{,}125 + 4\frac{1}{2} \cdot 0{,}8$;

690. ա) $\frac{0{,}72 - 0{,}104 - 0{,}112 \cdot 0{,}5}{0{,}063 : 1{,}26 \cdot 1{,}4}$;
բ) $\frac{28{,}4 \cdot 2{,}5 - 1{,}34}{1{,}08 : 1{,}5 + 6{,}3 : 0{,}28}$;
գ) $\frac{20{,}15 - 6 \cdot 0{,}5 + 16{,}3}{(0{,}2 + 11{,}8) \cdot 0{,}5}$;
դ) $\frac{(7{,}63 - 5{,}13) \cdot 0{,}4}{3{,}17 + 6{,}83}$:

691. ա) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+0{,}4+0{,}375\right)\cdot\dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3}\cdot 75}$;

բ) $\dfrac{2{,}4\cdot 3\dfrac{3}{4}+2\dfrac{2}{11}\cdot 4{,}125}{5\dfrac{5}{6}\cdot 2\dfrac{4}{7}}$;

գ) $\dfrac{3{,}5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{1\dfrac{1}{20}+4{,}1}$;

դ) $\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5\cdot 4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-\dfrac{4}{25}}$:

692. ա) Կազմեք 1-ից մինչև 20 բնական թվերի քառակուսիների աղյուսակ:
բ) Քանի՞ թվանշան կարող է ունենալ միանիշ թվի քառակուսին, երկնիշ թվի քառակուսին:
գ) Քանի՞ թվանշան կարող է ունենալ եռանիշ, քառանիշ, *n*-անիշ թվի քառակուսին:

693. Ընտրելով միավոր հատված՝ կոորդինատային ուղղի վրա նշեք տրված թվերը.
ա)1; 0,1; 0,3; 0,5; 1,2;
բ) –2; –1,5; –0,5; –0,2; –0,05;
գ) $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{3}{8}$;
գ) $-1\dfrac{1}{3}$; $-1\dfrac{1}{6}$; $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{5}{6}$; $-\dfrac{11}{12}$:

694. Թվային ուղղի վրա նշված են մի քանի կետեր: Այդ կետերին համապատասխանող թվերի գումարը –1,5 է: Նշված թվերից յուրաքանչյուրը կոորդինատային առանցքով տեղափոխել են ձախ 2 միավորով, որից հետո ստացված թվերի գումարը դարձել է –15,5: Քանի՞ կետ կար:

695. ա) 1 · 2 · 3 .... 13 · 14 · 15 արտադրյալը ներկայացրեք պարզ թվերի աստիճանների արտադրյալի տեսքով:
բ) Գտեք հետևյալ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը և ամենամեծ ընդհանուր բաժանորդը.
1) $5^2\cdot 7^4$ և $490\cdot 175$;
2) $2^5\cdot 3\cdot 7$, $3^4\cdot 5^4\cdot 72$ և 10000:
գ) 7-ի ո՞ր ամենամեծ աստիճանի վրա է բաժանվում
1 · 2 · 3 · .... · 99 · 100 թիվը:

696. ա) Ո՞ր ոչ հավասար թվերի քառակուսիներն են իրար հավասար:
բ) Ո՞ր դեպքում $(a+b)^2$-ն դրական թիվ չէ:
գ) Իրար հաջորդող ո՞ր ամբողջ թվերի միջև են գտնվում բոլոր դրական կանոնավոր կոտորակների քառակուսիները:

697. Արտահայտությունը գրառեք՝ օգտագործելով աստիճանը.

ա) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; բ) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

գ) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$; դ) $1{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}3$;

ե) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$; զ) $x \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$;

է) $\left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right) \cdot \left(\frac{m}{4}\right)$; ը) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$;

թ) $(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$; ժ) $\frac{m-n}{3} \cdot \frac{m-n}{3} \cdot \frac{m-n}{3}$:

698. Պարզեցրեք արտահայտությունը.
ա) $a^3 \cdot a^2$; բ) $b \cdot b^2 \cdot b^3$; գ) $y \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$;
դ) $ab \cdot ab^2$; ե) $x^2y \cdot x^3y^2$; զ) $2xy \cdot 4x^2y^3$;
է) $\frac{2}{3}x^2y^3z \cdot 2\frac{1}{3}x^3yz$; ը) $\frac{3}{4}a^3bc^2 \cdot 2\frac{1}{2}abc^2$:

699. Օգտագործելով աստիճանի հատկությունները, ազատեք փակագծերից.

ա) $(a^2)^3$; բ) $(a^3)^3$; գ) $(x^4)^2$; դ) $(x^2)^4$;

ե) $(2a^2)^2$; զ) $(xy^2)^3$; է) $(a^2bc^3)^2$; ը) $\left(\frac{1}{2}x^7\right)^4$;

700. Համեմատեք թվերը.
ա) 10^{20} և 90^{10}; բ) $0{,}1^{10}$ և $0{,}3^{20}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (701-704).

701. ա) $(2mn^2)^3 - 3m^2n^6m$; բ) $(5xy^3)^2$ - $(2xy^3)^2$;

702. ա) $x(x + y) - y(x - y)$; բ) $2(a + b) + 3(a - b)$;
գ) $3(x - 2y) + 2(x - 3y)$; դ) $m(p + 2q) - p(m - 3q)$:

703. ա) $(a + 2)(a - 1) - (a + 1)(a - 2)$; բ) $(x + 4)(x - 2) - (x + 2)(x - 1)$;
գ) $(a + 2)(a - 1) - (a + 3)(a - 2)$; դ) $(n + 7)(n - 5) - (n + 9)(n - 7)$:

704. ա) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + x - 3)$; բ) $(x^2 - 3x + 7)(-3 + 5x + 2x^2)$:

Ներկայացրեք բազմանդամի տեսքով (705, 706).

705. ա) $(x + y)^2$; բ) $(a - 8)^2$; գ) $(2a - 3b)^2$;
դ) $\left(xy + \frac{1}{2}y\right)^2$; ե) $(5m^2 - 2n^3)^2$; զ) $(0{,}2p^3 + 3q^4)^2$:

706. ա) $(y+x)^3$; բ) $(m-n)^3$; գ) $(2+a)^3$;

Ներկայացրեք երկանդամի քառակուսու տեսքով (707-709).

707. ա) x^2+2x+1; բ) a^2-6a+9;
գ) $4-4x+x^2$; դ) $49x^2-14x+1$;

708. ա) x^6+4x^3+4; բ) x^4+10x^2+25:

709. ա) $x^2+x+\frac{1}{4}$; բ) $0{,}09+0{,}6a+a^2$;
գ) $121x^4+44x^2+4$; դ) $2{,}56k^2-9{,}6kp+9p^2$;
ե) $64a^2b^2+48abc+9c^2$; զ) $9a^2b^4+30ab^2c+25c^2$:

Վերլուծեք արտադրիչների (710-712).

710. ա) $4ax-2bx$; բ) $2a^2-2a$;
գ) $48xy-3bxy^2$; դ) $85ab-170a$;
ե) $mx-nx+px$; զ) $8abx-6acy-10a$;
է) $14anx-21bny-7n$; ը) $63xy-84y^2+98y$:

711. ա) $1-x^2$; բ) $81-9a^2$; գ) m^4-n^2;
դ) $9a^2b^2-y^2$; ե) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$; զ) $0{,}81b^4-a^2c^2$;
է) a^6+b^6; ը) m^6-n^6; թ) $27p^3-8q^3$:

712. ա) $(x+1)^2-4x^2$; բ) $x^2+2xy+y^2-1$;
գ) $(a-4)^2-16$; դ) $p^2-2pq+q^2-4$;
ե) $36m^2-(m+9)^2$; զ) $9-x^2-2xy-y^2$;

713. Կրճատեք կոտորակը.

ա) $\frac{168}{256}$; բ) $\frac{26ax}{39a^2}$; գ) $\frac{17x^2y^3}{51xy^5}$; դ) $\frac{6x^3y^2(a-b)}{9xy^3(b-a)}$;

714. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$; բ) $\frac{(3-a)^2}{a^2-3a}$; գ) $\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$; դ) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$:

715. Արտահայտությունը ձևափոխեք հանրահաշվական կոտորակի.

ա) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$; բ) $\frac{m}{m-n}+\frac{n}{n-m}$;

գ) $\frac{m}{n}\cdot\frac{n^2}{2m}$; դ) $\frac{a}{2x}:\frac{3a}{8xy}$;

ե) $\frac{a+1}{3} \cdot \frac{7a}{a+1}$;   q) $\frac{x-2}{4x} : \frac{2-x}{3x^2}$:

716. ա) Եթե a-ն և b-ն ուղղանկյան կողմերն են, ապա ի՞նչ են որոշում $A = a \cdot b$ և $D = 2(a + b)$ բանաձևերը:

բ) Եթե P-ն ապրանքի գինն է (1 կգ-ի արժեքը), իսկ M-ը՝ նրա քանակությունը (կգ), ապա ի՞նչ է արտահայտում A = P M բանաձևը:

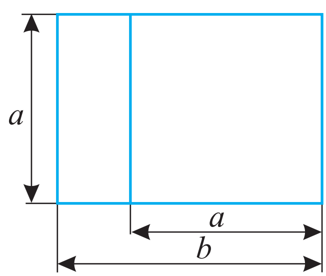
գ) Եթե x-ը հանդիսասրահի մեկ շարքի տեղերի թիվն է, իսկ y-ը՝ շարքերի թիվը, ապա ի՞նչ է արտահայտում $M = x \cdot y$ բանաձևը:

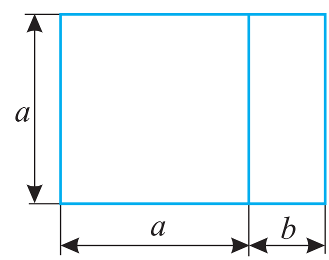
դ) Եթե k-ն քառակուսու կողմն է, ապա ի՞նչ են արտահայտում $A = k^2$, $B = 4k$ բանաձևերը:

ե) Եթե υ-ն գնացքի արագությունն է, t-ն՝ շարժման ժամանակը, ապա ի՞նչ է արտահայտում $A = \upsilon \cdot t$ բանաձևը:

717. Օգտագործելով նկ. 47-ը՝ բացատրեք, թե ի՞նչ են արտահայտում բերված բանաձևերը.

$A = ab - a^2$; $A = ab + a^2$





Նկ. 47

718. Համարելով a-ն և b-ն տված թվեր՝ հավասարումը լուծեք x-ի նկատմամբ.

ա) $2(x + a) = 3(x - a)$;
բ) $5(x - b) = 2(a - x)$;
գ) $a - (a + b)x = (2 - a)x = (2 - a)x - (3 + bx)$;
դ) $3x - a(b + x) = a(b - x) - 2(a - x)$:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (719-721).

719. ա) $\begin{cases} x + y = 13, \\ y = x - 4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + 4y = 230, \\ y = 5x; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 13x - 14y = 27, \\ 13x = 2y + 15; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 8x - 9y = 1, \\ 3y = 4x + 1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x - 3y = 12, \\ 2x + 4y = 90; \end{cases}$

զ) $\begin{cases} 4x + 4y = 1, \\ 3x + 3y = -5: \end{cases}$

720. ա) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = -5, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1: \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{1}{4}y = \frac{1}{5}x - 1, \\ \frac{1}{4}y = \frac{2}{5}x - 1; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 2x - \frac{5}{2}y = 4, \\ 3x - \frac{7}{2}y = 0; \end{cases}$

721. ա) $\begin{cases} 3(3x - y) + \frac{2}{5}(x - 2y) = 17, \\ 5x + y = 3; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} \frac{x + 3y}{2} = \frac{x - 2y}{3} + 31, \\ x + y = \frac{3}{4}(x - y) + 27; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x}{3} = 1, \\ x - \frac{x + y}{2} = 3; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1, \\ \frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1: \end{cases}$

722. ա) Ինչպե՞ս են տոկոսը ներկայացնում տասնորդական կոտորակով:
բ) Ինչպե՞ս փոխարինել տասնորդական կոտորակը տոկոսով:
գ) Ինչպե՞ս են գտնում տրված թվի տոկոսը:
դ) Ինչպե՞ս գտնել թիվը նրա տրված տոկոսով:

723. Գտեք.
ա) 100-ի 25%-ը; բ) 1,2-ի 50%-ը; գ) 200-ի 30%-ը;
դ) 30-ի 20%-ը; ե) 30-ի 6%-ը; զ) 4,2-ի 3%-ը:

724. ա) Ծովի ջուրը պարունակում է 5% աղ (զանգվածով): Քանի՞ կիլոգրամ թորած ջուր պետք է ավելացնել 50 կգ ծովի ջրին, որպեսզի ստացված ջրում աղի պարունակությունը կազմի 2%:

բ) 10 կգ զանգվածով պղնձի և անագի համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Որքա՞ն մաքուր անագ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որպեսզի ստացված համաձուլվածքում պղինձը կազմի 40%:

725. ա) Մինչև չորացնելը հացահատիկի խոնավությունը 20% էր: Այդ հացահատիկից 10 ց չորացնելուց հետո նրա զանգվածը փոքրացավ 100 կգ-ով: Գտեք հացահատիկի խոնավությունը չորացնելուց հետո:

բ) Պահեստում պահվող հացահատիկի խոնավությունը 20% էր: Չորացնելուց հետո խոնավությունը դարձավ 15%: Որքա՞ն դարձավ հացահատիկի զանգվածը, եթե այն սկզբում 50 տ էր:
Դիտողություն: Հացահատիկի խոնավությունը արտահայտվում է նրանում ջրի պարունակությունը՝ տոկոսներով:

726. ա) Ստուգումից պարզվեց, որ հացահատիկի խոնավությունը 23% է, իսկ չորացնելուց հետո՝ 12%: Քանի՞ տոկոսով թեթևացավ հացահատիկը չորացնելուց հետո:

բ) Սերմերը անձրևի տակ մնալուց հետո 20%-ով ծանրացան: Երբ դրանք չորացրին, զանգվածը պակասեց 20%-ով: Ստացվե՞ց արդյոք սկզբնական զանգվածը:

❖ **727.** Տվյալ աշխատանքը կատարելիս բանվորի արտադրողականությունը ավելացավ p%-ով: (⌈արտադրողականությունը միավոր ժամանակում ստացված արդյունքի քանակն է⌋): Քանի՞ տոկոսով կրճատվեց այդ աշխատանքի համար ծախսված ժամանակը, եթե.
ա) $p = 25$, բ) $p = 20$:

728. ա) Մի դետալի պատրաստման ժամանակը փոքրացավ 40%-ով: Քանի՞ տոկոսով ավելացավ աշխատանքի արտադրողականությունը:

բ) Շինարարական աշխատանքների ծավալը ավելացավ 80%-ով: Քանի՞ տոկոսով պետք է ավելացնել բանվորների թիվը՝ այդ աշխատանքը նույն ժամկետում ավարտելու համար, եթե աշխատանքի արտադրողականությունն ավելացվի 20%-ով:

❖ **729.** Տարբեր մակնիշի երկու ավտոմեքենաներ ունեն 160 կմ/ժ և 140 կմ/ժ առավելագույն արագություններ: Քանի՞ տոկոսով է երկրորդ մեքենայի արագությունը փոքր առաջինի արագությունից: Քանի՞ տոկոսով է առաջին մեքենայի արագությունը մեծ երկրորդի արագությունից:

730. Կոորդինատային ուղղի վրա նշեք մեկ ռացիոնալ և մեկ իռացիոնալ թիվ, որոնք գտնվում են տրված թվերի միջև.
ա) 0,5 և 0,15 բ) 0,272999143... և 0,2730015 ...

731. Տրված թիվը ռացիոնա՞լ է, թե՞ իռացիոնալ.

ա) $1+\sqrt{3}$; բ) $1-\sqrt{5}$;

գ) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; դ) $\sqrt{16}-\sqrt{23}$:

732. Նշեք երկու իռացիոնալ թիվ, այնպես որ նրանց.

ա) տարբերությունը լինի ռացիոնալ թիվ,

բ) արտադրյալը լինի ռացիոնալ թիվ,

գ) գումարը լինի ռացիոնալ թիվ:

733. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ռացիոնալ թվի քառակուսի արմատը.

ա) իռացիոնալ թիվ է.

բ) կարող է լինել ամբողջ թիվ,

գ) կարող է լինել վերջավոր տասնորդական կոտորակ,

դ) կարող է լինել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ:

734. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Ինչպիսի՞ թվեր են՝ ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն կետերի աբսցիսները, որոնց օրդինատներն են՝ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Գտեք իռացիոնալ աբսցիսների մոտավոր արժեքները պակասորդով՝ 0,01 ճշգրտությամբ:

735. Համեմատեք արտահայտությունների արժեքները.

ա) $5\sqrt{12}$ և $3\sqrt{27}$; բ) $\sqrt{27}$ և $3\sqrt{2}$;

գ) $2\sqrt{50}$ և $3\sqrt{32}$; դ) $\sqrt{\frac{3}{8}}$ և $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

ե) $2\sqrt{\frac{4}{75}}$ և $3\sqrt{\frac{25}{243}}$; զ) $5\sqrt{\frac{45}{72}}$ և $4\sqrt{\frac{45}{32}}$:

736. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$; բ) $\sqrt{(5-\sqrt{5})^2}$;

գ) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; դ) $\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$:

737. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2}$; բ) $\sqrt{18(\sqrt{3}-2)^2}$;

գ) $\sqrt{32(2-\sqrt{7})^4}$; դ) $\sqrt{48(\sqrt{5}-3)^4}$:

738. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը՝

ա) $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$; բ) $\sqrt{6\frac{6}{35}} = 6\sqrt{\frac{6}{35}}$;

գ) $\sqrt{4\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\frac{1}{2}}$:

739. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\frac{2}{3}a\sqrt{72a^3b}$; բ) $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^5x^2}{18}}$; գ) $x^3\sqrt{\frac{12a^2b}{49x^4}}$;

դ) $\frac{x}{4}\sqrt{\frac{64a^2b^4}{81x^3y^5}}$; ե) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-2)^2}{8}}$; զ) $\sqrt{\frac{20}{(1-\sqrt{3})^2}}$;

է) $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{5})^2}}$; ը) $\sqrt{\frac{(\sqrt{7}-3)^2}{(\sqrt{10}-3)^2}}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (740-742).

740. ա) $10\sqrt{\frac{2}{5}} + 3\sqrt{1\frac{1}{9}}$; բ) $15\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

գ) $2\sqrt{8\frac{1}{2}} - 5\sqrt{1\frac{9}{25}}$; դ) $6\sqrt{2\frac{1}{3}} + 4\sqrt{1\frac{5}{16}}$:

741. ա) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{8}} - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

բ) $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(3\sqrt{\frac{5}{6}} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$;

գ) $\left(\sqrt{13+5\sqrt{4,2}} + \sqrt{13-5\sqrt{4,2}}\right)^2$;

դ) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$:

742. ա) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; բ) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$;

գ) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(4-\sqrt{15})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; դ) $\frac{(\sqrt{75}+\sqrt{50})(5-2\sqrt{6})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$:

743. Արտահայտությունը ներկայացրեք քառակուսիների տարբերության տեսքով և վերլուծեք արտադրիչների ($a > 0$, $b > 0$).

ա) $a^2 - b$; բ) $a - b^2$; գ) $a - b$; դ) $a - 1$;

ե) $2 - 3a$; զ) $5b - 7$; է) $ab - 1$; ը) $a - bx^2$:

744. Տրված թվային արտահայտությունը ներկայացրեք երկու թվերի գումարի կամ տարբերության քառակուսու տեսքով.

ա) $3 + 2\sqrt{2}$; բ) $4 - 2\sqrt{3}$; գ) $7 + 2\sqrt{10}$;

դ) $7 + 4\sqrt{3}$; ե) $10 - 2\sqrt{21}$; զ) $7 - \sqrt{24}$:

745. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$; բ) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$;

գ) $\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}$; դ) $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} + \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$:

746. Կոտորակի հայտարարն ազատեք իռացիոնալությունից.

ա) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$; բ) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; գ) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$; դ) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2}}$;

ե) $\dfrac{3}{\sqrt{3} - 5}$; զ) $\dfrac{a}{\sqrt{a} - a}$; է) $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; ը) $\dfrac{m - n}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}$;

թ) $\dfrac{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 3}}$; ժ) $\dfrac{\sqrt{a - b} - \sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}}$:

747. Ապացուցեք, որ հավասարությունը ճիշտ է.

ա) $\dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 6$;

բ) $\dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$;

748. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)$;

բ) $\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{a}}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{a} + 1}{1 - \sqrt{a} - a}$;

գ) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$;

դ) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-6}-\dfrac{3}{\sqrt{m}+6}+\dfrac{m}{36-m}$:

749. Իրար հետևից գրեցին չորս իրար հաջորդող թվանշաններ, այնուհետև առաջին երկուսի տեղերը փոխեցին: Ստացված քառանիշ թիվը բնական թվի քառակուսի է: Գտեք այդ թիվը:

❖ **750.** Միաժամանակ վառեցին նույն երկարությամբ երկու մոմ: Մոմերից մեկը հաստ է (կարող է վառված մնալ 4 ժամ), մյուսը՝ բարակ (վառվում է 2 ժամ): Որոշ ժամանակ անց մոմերը հանգցրին: Պարզվեց, որ հաստ մոմի մնացորդը 3 անգամ երկար է բարակ մոմի մնացորդից: Որքա՞ն ժամանակ էին վառվել մոմերը:

751. ա) Մի բրիգադը առաջադրանքը կարող է կատարել 36 օրում, մյուսը՝ 45 օրում: Աշխատելով միասին՝ քանի՞ օրում նրանք կկատարեն առաջադրանքը:

բ) Առաջին ծորակով ավազանը լցվում է 16 րոպեում, երկրորդով՝ 48 րոպեում: Երկու ծորակների համատեղ գործելու դեպքում քանի՞ րոպեում կլցվի դատարկ ավազանը:

գ) Մարդատար մեքենան երկու քաղաքների միջև եղած հեռավորությունն անցնում է 42 րոպեում, բեռնատարը՝ 56 րոպեում: Քանի՞ րոպեից նրանք կհանդիպեն, եթե միաժամանակ դուրս գան այդ քաղաքներից և գնան իրար ընդառաջ:

752. Առաջին ծորակով ավազանը լցվում է a ժամում, երկրորդով՝ b ժամում, երրորդով՝ c ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը երեք ծորակներով, եթե.

ա) $a = 21,\quad b = 24,\quad c = 28$; բ) $a = 12,\quad b = 20,\quad c = 30$:

753. Ավազանը լցվում է երեք ծորակով: Միայն առաջին ծորակով՝ a ժամում, միայն երկրորդով՝ c ժամում, իսկ երեք ծորակներով միասին՝ x ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը միայն երրորդ ծորակով, եթե.

ա) $a = 12,\quad c = 28,\quad x = 6$; բ) $a = 9,\quad c = 30,\quad x = 5$:

754. Ընթանալիս ավտոմեքենան սարն ի վեր անցավ 42 կմ/ժ արագությամբ, իսկ սարն ի վար՝ 56 կմ/ժ արագությամբ: Որքա՞ն է մեքենայի շարժման միջին արագությունն ամբողջ ճանապարհի վրա:

Լուծում: Այստեղ պահանջվում է իմանալ՝ ինչպիսի հաստատուն արագությամբ կարելի է անցնել ամբողջ ճանապարհը նույն ժամանակամիջոցում: Դիցուք՝ ճանապարհը S կմ է: Այդ դեպքում գնալու և վերադառնալու վրա՝ 2 S կմ-ը մեքենան ծախսել է

$$\frac{S}{42}+\frac{S}{56}=\frac{S}{24}\text{ (ժամ)}:$$

Ուստի շարժման միջին արագությունը հավասար է

$$2S:\frac{S}{24}=48\text{ (կմ/ժ)}:$$

755. Ավտոմեքենան ընթանալիս սարն ի վեր անցավ a կմ/ժ արագությամբ, իսկ սարն ի վար՝ b կմ/ժ արագությամբ: Ինչպիսի՞ն է մեքենայի շարժման միջին արագությունը, եթե

ա) $a = 40,\quad b = 60$; բ) $a = 30,\quad b = 45$:

756. Նավակն A-ից B լողում է a ժամում, իսկ B-ից A (հոսանքին հակառակ) b ժամում: Քանի՞ ժամ կլողա գերանը A-ից B, եթե.

ա) $a = 3,\quad b = 4$; բ) $a = 2,\quad b = 3$:

757. 300 գ. զանգվածով առաջին համաձուլվածքը պարունակում է 20% անագ, իսկ 200 գ զանգվածով երկրորդ համաձուլվածքը՝ 40% անագ: Քանի՞ տոկոս անագ է պարունակում այդ համաձուլվածքներից ստացված համաձուլվածքը:

758. m_1 և m_2 զանգվածներով համաձուլվածքները համապատասխանաբար պարունակում են p_1 և p_2 տոկոս անագ: Գտեք այդ կտորներից ստացված համաձուլվածքում անագի պարունակության p տոկոսը, եթե.

ա) $m_1 = 15,\quad p_1 = 40,\quad p_2 = 20$;

բ) $m_1 = 35,\quad p_1 = 40,\quad m_2 = 15,\quad p_2 = 20$:

❖ **759.** Ապացուցեք, որ նախորդ խնդրում $p_1 < p_2$ պայմանից հետևում է, որ $p_1 < p < p_2$:

760. m_1 զանգվածով անագի և կապարի առաջին համաձուլվածքը պարունակում է p_1% անագ, իսկ երկրորդ համաձուլվածքը պարունակում է p_2% անագ: Երկրորդ կտորից քանի՞ գրամ պետք է վերցնել առաջինի հետ, որպեսզի ձուլելիս ստացվի p% անագ պարունակող համաձուլվածք, եթե.

ա) $m_1 = 300$, $p_1 = 40$, $p_2 = 60$, $p = 56$,

բ) $m_1 = 180$, $p_1 = 45$, $p_2 = 70$, $p = 60$:

761. Պղնձի և ցինկի 36 կգ համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Քանի՞ կգ պղինձ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որպեսզի նոր համաձուլվածքը պարունակի 60% պղինձ:

762. Պղնձի և անագի 12 կգ զանգվածով համաձուլվածքը պարունակում է 45% պղինձ: Քանի՞ կգ անագ պետք է ավելացնել այդ համաձուլվածքին, որպեսզի նոր համաձուլվածքը պարունակի 40% պղինձ:

763. Որքա՞ն մաքուր ջուր պետք է ավելացնել 4% աղ պարունակող 300 գ ծովաջրին, որպեսզի ստացվի 3% աղ պարունակող ջուր:

764. Որքա՞ն մաքուր արծաթ պետք է ավելացնել 200 գ 835 հարգի արծաթին, որպեսզի ստացվի 875 հարգի արծաթ:
Դիտողություն: 835 հարգի 1 գ արծաթը պարունակում է 0,835 գ մաքուր արծաթ:

765. Երկու համաձուլվածք պարունակում են համապատասխանաբար 60% և 40% անագ: Յուրաքանչյուր համաձուլվածքից որքա՞ն պետք է վերցնել, որպեսզի ստացվի 45% անագ պարունակող 600գ համաձուլվածք:

766. Երկու համաձուլվածք պարունակում են համապատասխանաբար p_1 և p_2 տոկոս անագ: Յուրաքանչյուրից որքա՞ն պետք է վերցնել, որպեսզի ստացվի p% անագ պարունակող m գ համաձուլվածք, եթե.

ա) $m = 450$, $p_1 = 70$, $p_2 = 40$, $p = 60$;

բ) $m = 600$, $p_1 = 80$, $p_2 = 65$, $p = 75$:

767. ***Լ.Ֆ.Մագնիցկիի «Թվաբանությունից»:*** Մի մարդ վաճառում էր երկու տեսակի գինի: Առաջին տեսակի գինու մի դույլն արժեր 10 գրիվեն (դրամական միավոր), իսկ երկրորդ տեսակինը` 6 գրիվեն: Նա ցանկացավ երկու գինիներից, վերցնելով որոշակի մասեր, ստեղծել գինի, որի մի դույլն արժենար 7 գրիվեն: Յուրաքանչյուր գինուց որքա՞ն մաս պետք է վերցնել երրորդ տեսակի 1 դույլ գինի ստանալու համար:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

1.1

11. ա) $y = 5 - x$; բ) $y = 2x - 3$; գ) $y = 1{,}5x + 7{,}5$; դ) $y = 0{,}6x - 1{,}6$: **12.** ա) $y = 4x + 3$; բ) $y = \frac{1}{3}x + 2$; գ) $y = 2 - 3x$: **13.** ա) $x = 3y - 2$; բ) $x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}$; գ) $x = 2y - 3$:
16. ա) $a = -2{,}5$; բ) $b = 25$:

1.2

27. ա) $a = 2$, $b = 2$; բ) a-ն ցանկացած թիվ է, $b = 2$:

1.3

30. ա) (14; 7), բ) (10; –2), գ) (2; 6), դ) (3; 21): **31.** ա) (3; 2), բ) (4; 2), գ) (5; 3), դ) (1; –1), ե) (3; 4), զ) (–2; 1), է) (31; 7), ը) (2; 1), թ) (1; –1), ժ) (0; –3), ի) (8; – 4), լ) (–3; 3):
32. ա) (2; –3), բ) (7; –13), գ) (2; 3), դ) (–1; –2), ե) (–2; 3), զ) (4; –5): **33.** ա) $\left(-\frac{25}{17}; \frac{23}{17}\right)$, բ) $\left(\frac{1}{6}; -\frac{3}{2}\right)$:

1.4

34. ա) (–5; 4), բ) (0; 1), գ) (5; –18), դ) (–4; –11): **35.** ա) (4; –1), բ) (–5; –1), գ) (0,5; 2,5), դ) (–1; 5): **36.** ա) (–1; 2), բ) (5; –2), գ) (7; 18), դ) (2; –1), ե) (0; 3), զ) (7; 5), է) (7; –2), ը) (5; –6): **37.** ա) (–2; 2), բ) (2; 3), գ) (1; 1), դ) (–3; –3): **38.** ա) $\left(\frac{2}{9}; 2\frac{5}{9}\right)$, բ) (0; 2):

1.5

43. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո: **49.** $a = 9{,}5$: **50.** Այո:

1.6

55. ա) (x; $0{,}5 - x$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, բ) (0,5; 0), գ) լուծում չունի, դ) (x; $0{,}5x - 2$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է: **57.** ա) լուծում չունի, բ) $\left(15; -11\frac{1}{3}\right)$, գ) (7; 5), դ) (5; –2), ե) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$, զ) լուծում չունի: **59.** ա) լուծում չունի, բ) (–3; 7), գ) լուծում չունի, դ) (x; $x + 2$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է:

1.7*

61. ա) (1; 1; 1), բ) (1; 4; 2), գ) (2; 1; 3), դ) (3; 2; 1), ե) (1; 1; 1), զ) (2; 0; 1), է) (2; 3; –1), ը) (3; 3; 3):

1.8*

62. ա) (14; 3), բ) (–7; –5), գ) (3; 5), դ) (2; 2; 2), ե) (–3; 9; 0), զ) (5; 5; 5): **63.** ա) (2; 1), բ) (3; 2), գ) (1; 1), դ) (2; 1; 0), ե) (0; 0; 1), զ) (1; 1; 1), է) (1; y; $-y$), որտեղ y-ը ցանկացած թիվ է, ը) (x; 2; $4 - x$), որտեղ x-ը ցանկացած թիվ է, թ) (1; 1; 1), ժ) (2; 1; –1):

1.9

74. ա) 0,5, բ) 2: 91. ա) $a = -0{,}25$, $b = -5$, բ) $a = -1$, $b \neq -2$:

1.10

79. ա) 3 և 7, բ) 6 և 15: **80.** ա) 23 և 17, բ) 4 և 19: **81.** ա) 11 և 5, բ) 6 և 18; 8,4 և 25,2: **82.** ա) 13 և 6, բ) 50 և 60: **83.** ա) 3 և 5, բ) 2,5 և 4: **84.** ա) 28 կմ, բ) 42 կմ: **85.** 80 դետալ: **86.** 12 և 45 կմ/ժ: **87.** 24 և 17 կմ: **88.** 11 և 15 սմ: **89.** 20 տոմս` 1000 դրամանոց և 10 տոմս` 1500 դրամանոց: **90.** Բազկաթոռն արժե 12000 դր., սեղանը` 7000 դր: **91.** 6: **92.** 45: **94.** 40 և 25 մ: **95.** 5000 դր. և 3000 դր: **96.** 100 հրուշակ և 200 բուլկի: **97.** 600 և 400: **98.** 51 և 33,6: **99.** 9, 13 և 16 սմ: **101.** 41, 53 և 66 սմ: **102.** 42: **103.** 40 և 170 ռուփի: **104.** 400 գ: **106.** ա) 125 կգ, բ) 2000, 2500, 3000 և 3500, գ) 6, 5, 4, 3, 3, 2 և 1 տարեկան: **107.** 60, 45 և 40 ընկույզ: **108.** 16, 10 և 10: **109.** ա) 3 ժ, բ) 4 ժ, գ) 5 ժ: **110.** 75: **111.** 4 ժամում:

2.1

115. ա) 1, բ) 1, գ) 1, դ) 1: **116.** ա) 2, բ) 1, գ) $\frac{1}{2}$, դ) $\frac{1}{4}$: **117.** ա) 1, բ) արտահայտությունն իմաստ չունի: **118.** ա) 2^3, բ) 2^8, գ) 3^{-2}, ե) 3^{-1}, զ) 3^{-4}, է) 5^1, ը) $16^{-1} = 4^{-2} = 2^{-4}$: **119.** ա) 10000; 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,001; 0,0001, բ) 32; 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{32}$, գ) -27; 9; -3; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$: **120.** ա) 1; -1; -1; -1; -1, բ) 1; -1; 1; 1; -1, գ) $\frac{1}{4}$; -4; 4; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$: **128.** ա) a^{-1}, բ) a^1, գ) a^3, դ) a^0, ե) a^{-10}, զ) a^9:

2.2

131. ա) a^6b^{-15}, բ) $a^{14}b^{-4}$, գ) $a^{12}b^{20}$: **138.** ա) $3^4 > 4^3$, բ) $2^4 = 4^2$, գ) $10^{20} > 20^{10}$, դ) $100^{200} > 200^{100}$, ե) $1999^{2000} > 1998^{1999}$: **139.** ա) $(a^2)^5$, բ) $(a^2)^6$, գ) $(a^2)^{21}$: **140.** ա) $(a^5)^{10}$, բ) $(a^2)^{25}$, գ) $(a^{10})^5$: **144.** $(a^{-2})^{-25}$, բ) $(a^{-5})^{-10}$, գ) $(a^{10})^5$, դ) $(a^{-10})^{-5}$, ե) $(a^{-25})^{-2}$:

2.3

154. ե) $\frac{(x-y)^2}{4xy}$, գ) $\frac{5m}{7n(a-b)}$, է) $\frac{p}{2q}$, ը) $\frac{4(a+b)}{9}$: **160.** բ) $\frac{2(a-b)}{a^2-ab+b^2}$, ժ) x^2+xy+y^2:

2.4

165. ա) $\frac{x}{x-2}$ և $\frac{-1}{x-2}$, ե) $\frac{15}{2x-8}$ և $\frac{14}{2x-8}$, զ) $\frac{2x-6}{2x-10}$ և $\frac{5}{2x-10}$:

2.5

175. ա) -1, բ) $\frac{2}{x-y}$, գ) $\frac{5a}{a-b}$, դ) $\frac{3m+3}{n-m}$: **177.** $\frac{3a}{2}$, բ) $\frac{2x}{3}$: **180.** ա) $\frac{2a}{a^2-b^2}$, բ) $\frac{5a^2-4ab}{(a-2b)(a+b)}$, գ) $\frac{4x^2-xy}{(x-y)(2x-y)}$: **182.** ա) $\frac{2q+3}{pq}$, բ) $\frac{a-by}{xy}$, գ) $\frac{m^2-n}{mn^2}$, դ) $\frac{a^2+12b}{3ab^2}$:
183. ա) $\frac{m(b+c)}{abc}$, բ) $\frac{a(2b-5n)}{bmn}$, գ) $\frac{2ab-8b^2+4a}{bm}$, դ) $\frac{z-y}{yz}$:
184. ա) $\frac{2x-3}{x^3}$, բ) $\frac{7-3am^2}{m^4}$, գ) $\frac{a^4+b^4}{a^5b^7}$, դ) $\frac{3az^4-3bx^6y}{x^7y^5z^5}$:

185. ա) $\frac{5}{a+b}$, բ) $\frac{y^2-x^2}{xy(a-b)}$, գ) $-\frac{1}{xy}$, դ) $\frac{n+1}{mn(m-2n)}$:

186. ա) $\frac{5m-9n}{m^2-n^2}$, բ) $\frac{2x+2}{9x^2-4}$, գ) $\frac{a}{a^3-b^3}$, դ) $\frac{m^2+mn+n^2}{2(m^3+n^3)}$, ե) $\frac{2y}{(x-2y)^2}$, զ) $\frac{p^2-pq+q^2}{(p+q)(q^3-p^3)}$: **187.** ա) $\frac{2y}{x+y}$, բ) $\frac{a^2+b^2}{b}$, գ) $\frac{2b^2}{b-a}$, դ) $\frac{2a^2}{a+b}$:

191. ա) $\frac{4n}{m+n}$, բ) $\frac{2(b+1)}{a+2}$: **196.** ա) $\frac{1}{5}m$, բ) $-\frac{1}{4}a$, դ) $x-1{,}5$:

2.6

199. ա) $ab+ac+bc$, բ) $6x+\frac{3x^3}{y}+12x^2$: **200.** ա) $\frac{a}{x}$, բ) $1-2a$, գ) -1, դ) $-\frac{1}{x}$, ե) $-\frac{x}{n}$, զ) 3: **201.** ա) $a+\frac{1}{b}$, բ) $\frac{3a-2b^2}{6b}$: **202.** ա) 0, բ) $\frac{3x}{4ay}$, **204.** ա) b, բ) a:

2.7

209. ա) $x=2$, բ) $x=-4$, գ) $x=2$, դ) $x=-2{,}5$, ե) $x=0$: **213.** ա) 0,96, բ) 0,1, գ) –4, դ) $-10\frac{1}{9}$: **214.** ա) 6, բ) 0,5: **215.** 2: **218.** ա) x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, բացառությամբ $x=0$ արժեքից, բ) x-ի և y-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, բացի $x=y=0$ դեպքից, գ) m-ի և n-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, որոնց համար $|m|\neq|n|$: **223.** բ) –5, –1, 1, 5, գ) –2, 0, 2, 4, դ) –2, 0:

2.8

227. ա) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, բ) $\frac{1}{(a+b)^2}$: **228.** ա) 0,3, բ) $\frac{4}{9}$, գ) 8: **230.** ա) $a^{-1}-b^{-1}$, բ) $a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$: **231.** ա) $a\neq3$ և $a\neq-3$: **232.** ա) $\frac{a+b}{b-a}$, գ) $\frac{ab}{a-b}$: **233.** ա) $-\frac{1}{3998000}$, բ) $\frac{1999}{949494}$: **234.** ա) $\frac{2a}{1-3a}$, բ) $\frac{a}{2-2a}$, գ) $\frac{2x^2+6x}{9}$, դ) $\frac{-3x(x-1)}{4}$: **235.** ա) $\frac{4}{143}$, գ) –128: **236.** ա) $\frac{14}{11}$:

2.9

240. ա) a-ի և b-ի ցանկացած արժեքի համար, գ) $b\neq0$ դեպքում, դ) $a\neq0$, $b\neq0$ դեպքում, զ) $x\neq-y$ դեպքում: **245.** ա) $-\frac{2a}{3b}$, բ) $\frac{5m}{4n}$, գ) $\frac{5b(a-b)}{4c(a+b)}$, դ) $\frac{5m(2n+m)}{4(2n-m)}$:

250. ա) $2(x^2+y^2)$, բ) $\frac{m^4-n^4}{m^2n^2}$, գ) –1, դ) –2: **251.** ա) x^2+9, բ) $-3m$, գ) $-5a$, դ) 0:

253. դ) $\frac{1}{m}$, **265.** ա) 0,1, բ) 2: **266.** ա) –0,2, բ) $12\frac{1}{14}$, գ) 10, դ) 11:

3.1

272. ա) 0,(3), ի) 0,5(0), կ) 0,(23895):

3.3

291. ա) 3; 3,1; 3,12; բ) 2; 2,3; 2,31; գ) 3; 3,6; 3,61: **292.** ա) 3,1; բ) 3,19; գ) 3,191; դ) 3,1919:

3.4

297. ա) 0,345; բ) 0,765; գ) 0,023; դ) –0,343: **298.** ա) 1,24; բ) 3,57; գ) 2,58; դ) 2,56: **299.** ա) 1,25; բ) 1,24; գ) –7,02; դ) 0,13: **308.** ա) $a + b \approx 3{,}4$ $a - b \approx 3{,}2$; բ) $a + b \approx 1{,}3$ $a - b \approx -3{,}9$; գ) $a + b \approx 0{,}2$ $a - b \approx -0{,}8$: **310.** ա) $ab \approx -4{,}68$ $a : b \approx -1{,}27$ բ) $ab \approx 1{,}69$ $a : b \approx 2{,}73$; գ) $ab \approx 0{,}0198$ $a : b \approx 229$: **316.** Երբ $a = -b$, $b \neq 0$: **329.** ա) 2,35; բ) 3,21; գ) –3,149; դ) –5,22: **330.** Այո: **334.** ա) 3,(27); բ) 52,(12); գ) 0: **336.** ա) 0,222; բ) 1,23; գ) 12,0: **337.** ա) –0,333; բ) –1,27; գ) –12,0: **338.** ա) 127,02; բ) 0,13; գ) –1,35: **339.** ա) 3,4; բ) 1,4: **342.** ա) 7,9; բ) –11: **345.** ա) $7{,}2 < a + b < 7{,}4$; բ) $7{,}23 < a + b < 7{,}25$:

4.1

362. է) $(-2)^2 < (-3)^2$; ը) $4^2 = (-4)^2$; ք) $(-4)^2 > 1^2$:

4.2

372. ա) –3, –2, –1, 0, 1; բ) –2, –1, 0: **375.** ա) [2; 4], բ) (2; 4), գ) (2; 4], դ) [2; 4), ե) [5; +∞), զ) (5; +∞), է) (–∞; 0], ը) (–∞; 0): **378.** ա) [3; 7], բ) (3; 7], գ) [5; 6], դ) [5; 6), ե) [7; +∞), զ) (–∞; 8):

4.3

385. ա) $x > 1$, բ) $x < 0$, գ) $-1 < x < 3$: **389.** ա) ոչ, բ) ոչ, գ) այո, –4, դ) այո, 0:

397. ա) $\left(-\infty;\ 1782\,\frac{2}{3}\right)$, բ) (–∞; 198,8), գ) $\left(1\frac{11}{14};\ +\infty\right)$, դ) (–∞; 0,9): **398.** ա) $\left(5\,\frac{14}{15};\ +\infty\right)$, բ) (0; +∞), գ) (–∞; 27,55): **399.** բ) (–∞; –2), գ) (–20; +∞): **406.** ա) (2; +∞), բ) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$, դ) $\left(-\infty;\ -\frac{4}{7}\right)$, ե) (–0,75; +∞): **408.** ա) $\left(-\infty;\ 6666\,\frac{2}{3}\right)$, բ) (–0,000025; +∞):

4.4, 4.5

413. ա) (–∞; 1), բ) (–1; +∞), գ) (–∞; –1), դ) (–∞; –6,5): **414.** ա) (–∞; 3), բ) $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$, գ) (–∞; –0,5), դ) $\left(-\infty;\ -\frac{4}{11}\right)$: **415.** ա) (–∞; +∞), բ) լուծում չունի: **416.** ա) լուծում չունի, դ) (–∞; +∞), **417.** ա) (–∞; 24), բ) (–∞; 6), գ) (–∞; +∞), դ) (5; +∞), ե) (–1; +∞), զ) (–∞; +∞): **420.** ա) լուծում չունի, բ) $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$: **421.** ա) (–∞; 3), բ) (2,5; +∞), գ) (–∞; 0,5), դ) լուծում չունի: **423.** գ) (–∞; 2,4), դ) (8; +∞), ե) (5,25; +∞), զ) $\left(3\,\frac{1}{6};\ +\infty\right)$, է) $\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$, ը) լուծում չունի: **424.** ա) այո, գ) ոչ: **425.** ա) (–∞; 2], դ) [8; +∞): **426.** ա) [4,5; +∞), գ) $\left[-\frac{3}{16};\ +\infty\right)$: **427.** ա) այո, դ) ոչ: **428.** ա) ոչ, բ) ոչ: **429.** ա) այո, բ) այո:

4.6, 4.7

436. ա) այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո: **438.** գ) (1; +∞), դ) (–∞; 0,5), է) լուծում չունի, ը) (–∞; –1): **439.** ա) $\left(-\frac{4}{3};\ -\frac{9}{20}\right)$, բ) (12; +∞), գ) (–∞; 3), դ) լուծում չունի: **440.** ա) (–∞; –4], գ) {4}: **441.** ա) լուծում չունի: **442.** ա) $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, բ) (–3,5; 2,8], գ) (–3; –2), դ) (–1; 4), ե) $\left[\frac{7}{3};\ \frac{10}{3}\right)$, գ) (−18; −10)։ **444.** գ) լուծում չունի, դ) $(-\infty; +\infty)$, զ) $(-\infty; +\infty)$։

4.8

447. բ) $x = 1,5$; $x = -1,5$, գ) $x = -1$; $x = 3$։ **449.** ա) $x = -1$, գ) $x = \frac{3}{4}$։ **450.** բ) $[0; +\infty)$, գ) $[-2; +\infty)$։ **451.** բ) (2; 4), գ) $(-\infty; 2)\cup[4; +\infty)$։ **452.** ա) $\left[\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right]$, բ) $\left(-\infty; \frac{11}{8}\right)\cup\left(\frac{21}{8}; +\infty\right)$։ **453.** բ) (−6; 0), գ) $(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$։ **454.** ե) [1; 3], զ) $x = \frac{11}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$։ **455.** ա) $[1; +\infty)$, բ) $(-\infty; 2]$։ **460.** ա) $(-\infty; +\infty)$, բ) լուծում չունի, գ) $x = 3$։ **461.** ա) $x = \frac{2}{3}$, բ) $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$, գ) $(-\infty; +\infty)$, դ) լուծում չունի, ե) $(-\infty; +\infty)$։

5.1

467. ա) $y_1 < y_2$, բ) $y_1 > y_2$։ **470.** ա) ոչ, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո։ **474.** ա) ոչ, բ) այո, գ) այո։ **475.** ա) $x \neq 0$ դեպքում, բ) $x = 0$ դեպքում, գ) x-ի ոչ մի արժեքի դեպքում։

5.3

485. ա) 3, բ) 9, գ) 5, է) 4, թ) 1,3։ **486.** դ) 1,2, է) 3։ **487.** ա) 30, գ) 2 ե) 2։ **490.** ա) $\frac{3}{2}$, գ) $\frac{5}{4}$, դ) $\frac{7}{3}$։ **491.** ա) 30, բ) 80։ **495.** ա) 3 և 4, դ) 6 և 7։

5.5

506. գ) 1, դ) 5։ **507.** ա) $x \geqslant 0$ դեպքում, բ) ցանկացած x-ի համար, գ) $x \leqslant 0$ դեպքում, դ) $x = 0$ դեպքում։ **508.** ա) a, բ) $-b$, գ) 0, դ) $-n$, ե) $x + 1$, զ) $m - 2$, է) $3a + 1$, ը) $-p + 4$։ **509.** ա) $\frac{1}{2}$, բ) $\frac{1}{3}$, գ) $1\frac{1}{5}$, դ) $2\frac{1}{3}$։ **510.** ա) 4, բ) 9, գ) 8, դ) 27, ե) 16, զ) 81, է) a^2, ը) m^3։ **511.** ա) $|x + 1|$, գ) $|1 - m|$։ **515.** ա) a^2, բ) $x\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, ե) $|ab|$, զ) $2|mn|$, է) $x^2|y|$, ժ) $4|y|\sqrt{xy}$, $xy \geqslant 0$, ը) $11m^2n|k|\sqrt{n}$, $n \geqslant 0$։ **518.** ա) $\sqrt{8}$, բ) $-\sqrt{18}$, ե) $\sqrt{4a^2}$, է) $-\sqrt{24x^2}$, ի) $-\sqrt{4m^4n^2}$։ **519.** է) $\frac{x\sqrt{x}}{3}$, ը) $\frac{\sqrt{7a}}{4|b|}$, թ) $\frac{1}{2}\left|\frac{mn}{a}\right|\sqrt{\frac{3m}{b}}$, $\frac{m}{b} \geqslant 0$։ **521.** ա) օրինակ՝ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$։ **522.** ա) $\sqrt{3\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{30}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$։ **523.** ա) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \frac{2,449}{3} \approx 0,816$։ **529.** ա) $x(\sqrt{x} + 1)$, ը) $mn(3 - \sqrt{m})$, եթե $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $mn(3 + \sqrt{m})$, եթե $m \geqslant 0$, $n < 0$։

5.6

539. ա) $x = \frac{1}{3}$, դ) $x = -10$, զ) $x = -\frac{1}{4}$։ **540.** զ) լուծում չունի, է) $x = \frac{44}{3}$։ **543.** ա) $x = 0$, ե) լուծում չունի, զ) լուծում չունի։ **544.** ա) լուծում չունի, դ) $x = 1$։ **545.** ա) $x = 2$, բ) լուծում չունի, գ) $x = 1$; $x = 0$, դ) $x = -1$, ե) լուծում չունի։ **547.** գ) $x = \frac{28}{9}$, դ) $x = \frac{8}{3}$։ **550.** ա) լուծում չունի, գ) $[0; +\infty)$։ **551.** բ) [0; 1,21], դ) $[0; +\infty)$։ **552.** բ) լուծում չունի, ե) $\left[\frac{1}{3}; \frac{13}{31}\right)$։ **555.** բ) լուծում չունի, գ) $\left[-\frac{1}{12}; +\infty\right)$: **556.** ա) $(1; +\infty)$, բ) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$, դ) $\{-3\}\cup[4; +\infty)$:

557. ա) $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)\cup(0; +\infty)$, դ) $\left[-\frac{65}{9}; 0\right]$: **558.** ա) $(3; +\infty)$, բ) $\left\{-\frac{1}{10}\right\}\cup(1; +\infty)$, գ) լուծում չունի, դ) $\{-4\}$, է) $(-\infty; -4)\cup(-2; 0]$:

6.1

563. ա) 1, բ) 1, գ) 49, դ) 49, ե) –4, զ) 0, է) 0, ը) 1, թ) –4: **564.** գ) $(x-4)^2+1$, դ) $(x+2)^2$, ե) $(x+2{,}5)^2-12{,}25$, զ) $(x-1{,}5)^2-0{,}25$, է) $2\cdot((x-2)^2-0{,}5)$, ը) $-4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right)$, թ) $3\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right)$, ժ) $3\left((x-1)^2-\frac{2}{3}\right)$, ի) $-2((x+2)^2-9)$: **568.** ա) $2(x-1)(x-1{,}5)$, բ) $3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$: **569.** ա) $(x+5)(x+3)$, բ) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$: **572.** ա) մեծագույն արժեքը՝ 1, փոքրագույն արժեք չունի, գ) փոքրագույն արժեքը՝ 9, մեծագույն արժեք չունի: **573.** ա) $\frac{1}{x+2}$, բ) $\frac{1}{x-1}$, գ) $\frac{1}{x-1}$: **574.** ա) $\frac{1}{x-2}$, գ) $\frac{x-5}{x-3}$: **575.** ա) $\frac{2x-3}{2x-7}$, բ) $\frac{3x-1}{2x+9}$: **576.** գ) $\frac{x-12}{(x-1)(x+5)}$:

6.3

591. ա) 0; 4, բ) 0; –6, գ) $0; -\frac{1}{3}$: **592.** բ) 3; –3, գ) 5; –5, դ) 4; –4, ե) 7; –7, զ) արմատներ չունի, ը) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$: **593.** ա) $\sqrt{3}; -\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{5}; -\sqrt{5}$, գ) $\sqrt{3}; -\sqrt{3}$, դ) $-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}$, ե) $-0{,}5\sqrt{3}; 0{,}5\sqrt{3}$: **594.** ա) 0; 6, բ) $0; \frac{4}{9}$, գ) $0; -1\frac{16}{19}$, դ) $0; -\frac{5\sqrt{3}}{3}$: **597.** ա) 0, բ) 0, գ) 0; 4, դ) $0; 10\frac{1}{3}$, ե) $0; -1\frac{2}{9}$: **598.** ա) 0; 2, բ) 0; –4, գ) –2; 2, դ) –4; 4, ե) –0,75; 0,75: **601.** ա) $\frac{n}{m}$ և $-\frac{n}{m}$, եթե $m \neq 0$, արմատ չունի, եթե $m = 0$, $n \neq 0$, x-ը ցանկացած թիվ է, եթե $m = 0$, $n = 0$:

6.4

606. ա) 2; 4, բ) –2; –3, գ) –1; 2, դ) –3; 2, ե) արմատ չունի, զ) –2, է) $-\frac{-4-\sqrt{61}}{5}; \frac{-4+\sqrt{61}}{5}$, ը) 0,5; 1,5, թ) $-\frac{1}{3}; 2$, ժ) $1; \frac{1}{5}$: **607.** ա) –0,5; 1, բ) 0,25; 0,5, գ) $-2\frac{2}{3}; 3$, դ) $-7\frac{1}{7}; 7$, ե) 0,5; 2, զ) 0,2; 5: **608.** ա) –1; 2,5, բ) 6; 8, գ) $-6\frac{5}{7}; 7$, դ) $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, ե) –0,5; 9, զ) $\frac{-13-\sqrt{253}}{14}; \frac{-13+\sqrt{253}}{14}$, է) $-\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}$, ը) –1,5; 2,5: **609.** ա) –4; 5, բ) –2,5; 2, գ) $\frac{1}{3}; 8$, դ) –1; 2, ե) $-\frac{5}{6}; 5$, զ) արմատ չունի, է) 2,5; 6, ը) –1; 8: **612.** ա) 0,5; 0,7, բ) $\sqrt{2}; 4\sqrt{2}$, գ) $\frac{5-2\sqrt{31}}{11}; \frac{5+2\sqrt{31}}{11}$, դ) արմատ չունի, է) $\frac{-\sqrt{6}}{3}$, ը) արմատ չունի, թ) $-7; \frac{3}{7}$, ժ) $-1{,}5; \sqrt{2}$, ի) $\frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{15}}{3}; \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{3}$, լ) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}; \frac{\sqrt{2}+1}{4}$, խ) $-\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

$-\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$; ծ) արմատ չունի, կ) $-5\frac{1}{3}$; 0, հ) 0; $\frac{6}{11}$: **616.** ա) $m=-2\sqrt{3}$; $m=2\sqrt{3}$, բ) m-ի ոչ մի արժեքի դեպքում, գ) $m=\frac{1}{3}$, դ) $m=0$; $m=-4$: **617.** ա) $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, բ) $2-2\sqrt{1-a}$; $2+2\sqrt{1-a}$: **618.** ա) $a<1$, բ) $a=1$, գ) $a>1$: **619.** ա) a; $2a$, բ) 0,5, եթե $a=0$; $\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}$; $\frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$, եթե $a\neq 0$ և $a<1$; 1, եթե $a=1$; արմատ չունի, եթե $a>1$:

6.5

623. ա) 2, բ) արմատ չունի, գ) 0,5; 2, դ) -3; $-\frac{1}{3}$, ե) -12; -4, զ) -2; 11, է) արմատ չունի, ը) արմատ չունի: **624.** ե) -2; 1, զ) -2; 3, է) -8; -6, ը) -11; -6: **625.** ա) $-\frac{2}{3}$; 2, բ) $2-\sqrt{14}$; $2+\sqrt{14}$, գ) արմատ չունի, դ) $-1,5$, ե) -2; $\frac{11}{16}$, զ) $\frac{1-\sqrt{73}}{36}$; $\frac{1+\sqrt{73}}{36}$, է) $\frac{1-\sqrt{29}}{14}$; $\frac{1+\sqrt{29}}{14}$, ը) -1; $\frac{3}{14}$:

6.6

629. ա) արմատներ չունի, բ) արմատ չունի, գ) $x_1+x_2=-3$, $x_1\cdot x_2=-2$, դ) $x_1+x_2=3$, $x_1\cdot x_2=2$, ե) $x_1+x_2=2$, $x_1\cdot x_2=1$, զ) $x_1+x_2=-4$, $x_1\cdot x_2=4$:

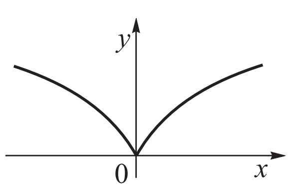
6.7

642. 3 և 7: **644.** ա) 10 և 11, բ) 14 և 15, գ) 4 և 11, դ) 16 և 28: **645.** ա) 7 և 13, բ) -5 և 3: **646.** ա) 35 և 53, բ) 51: **647.** ա) 160, բ) 60 մ^2, 4 մ և 15 մ, գ) այո, այո, ոչ, դ) հնգանկյան: **648.** ա) 31, բ) 7: **649.** ա) 28 մ, բ) 5 և 5 սմ: **650.** 20%-ով և 30%-ով: **651.** 5%-ով; 4%-ով: **652.** 10 և 20%-ով: **653.** 11 և 12: **654.** 32 սմ: **655.** -11, -10, -9 կամ 9, 10, 11: **656.** 24 տարեկան կամ 29 տարեկան: Հին ձեռնարկում այս խնդրի մասին գրված է. ... քանի որ հարցը վերաբերում է տիկնոջ տարիքին, ապա քաղաքավարության համար պետք է համարել, որ տիկնոջ տարիքը 24 է:

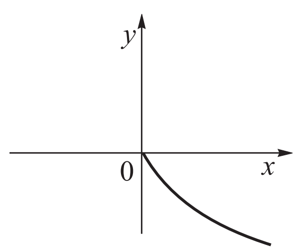
7.2, 7.3, 7.4

666. ե) 2, ը) 10: **668.** ա) $y(1)>y(2)$, բ) $y(2)>y(3)$, գ) $y(1)>y(5)$: **675.** գ) $x=\frac{1}{3}$; $x=0,2$; $x=-0,5$, դ) $y>0$; $0<y<0,5$; $-\frac{1}{3}<y<0$; ե) $y>1$; $-1<y<-\frac{1}{3}$:

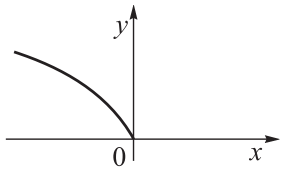
685.



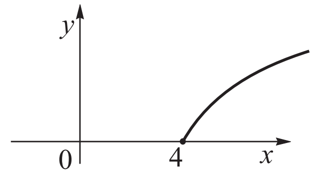
ա)



գ)



դ)



զ)

Խնդիրներ կրկնության համար

688. ա) 1000, բ) 172, գ) 17, դ) 0,9: **689.** ա) 3, բ) 0,25, գ) 5,74, դ) 2, ե) 104, զ) 11,3, **690.** ա) 8, բ) 3, գ) 5,575, դ) 0,1: **691.** ա) 0,0102, բ) 1,2, գ) 2: **698.** է) $1\frac{5}{9}x^5y^4z^2$, ը) $1\frac{7}{8}a^4b^2c^4$: **700.** ա) $10^{20} > 90^{10}$, բ) $0,1^{10} > 0,3^{20}$: **712.** դ) $(p-q-2)(p-q+2)$:

714. գ) $\frac{m+n}{m-n}$, դ) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$: **719.** ա) (8,5; 4,5) բ) (10; 50), գ) (1; –1), զ) լուծում չունի:

721. ա) (1; –2), բ) (17; 13), գ) (6; 0), դ) (3; 2): **724.** ա) 75 կգ, բ) 1,25 կգ:

725. ա) $11\frac{1}{9}$ %, բ) $47\frac{1}{17}$ տ: **726.** ա) 12,5%-ով, բ) 4%-ով: **727.** $\frac{100p}{100+p}$%-ով; ա) 20%-ով, բ) $16\frac{2}{3}$%-ով: **728.** ա) $66\frac{2}{3}$%-ով: բ) 50%-ով: **729.** ա) 12,5%-ով և $14\frac{2}{7}$%-ով: **736.** ա) $\sqrt{3}-1$, բ) $5-\sqrt{5}$, գ) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, դ) $4-\sqrt{10}$: **739.** զ) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}$, ը) $\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{10}-3}$: **741.** գ) 42:

743. ա) $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})$, ը) $(\sqrt{a}-x\sqrt{b})(\sqrt{a}+x\sqrt{b})$: **744.** ա) $(\sqrt{2}+1)^2$: **745.** ա) $2\sqrt{2}$, բ) 2:

748. ա) $2x\sqrt{x}+1$, բ) –1, գ) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, դ) $\frac{3}{\sqrt{m}-6}$: **749.** 4356: **750.** 1,6 ժ: **751.** ա) 20 օրում, բ) 12 րոպեում: **752.** $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ ժամում; ա) 8 ժ-ում, բ) 6 ժ-ում:

753. $\frac{abx}{ab-bx-ax}$ ժ-ում, ա) 21 ժ-ում, բ) 18 ժ-ում: **755.** $\frac{2ab}{a+b}$ կմ/ժ, ա) 48 կմ/ժ, բ) 36 կմ/ժ:

756. $\frac{2ab}{b-a}$ ժ, ա) 24 ժ, բ) 12 ժ: **757.** 28%: **758.** $\frac{m_1p_1+m_2p_2}{m_1+m_2}$, ա) $p = 26$, բ) $p = 34$:

760. $\frac{(p-p_1)m_1}{p_2-p}$ գ, ա) 1200 գ, բ) 270 գ: **761.** 13,5 կգ: **762.** 1,5 կգ: **763.** 100 գ: **764.** 64 գ:

765. 150 և 450 գ: **766.** $\frac{(p-p_2)m}{p_1-p_2}$ և $\frac{(p_1-p)m}{p_1-p_2}$ գ, ա) 300 և 150 գ, բ) 400 և 200 գ: **767.** 0,25 դույլ՝ 10 գրիվեն արժեքով և 0,75 դույլ՝ 6 գրիվեն արժեքով:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ 3
ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

ԳԼՈՒԽ 4
ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ 5
ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԱՐՄԱՏ

ՍԵՐԳԵՅ ՆԻԿՈԼՍԿԻ, ՄԻԽԱՅԻԼ ՊՈՏԱՊՈՎ,
ՆԻԿՈԼԱՅ ՌԵՇԵՏՆԻԿՈՎ, ԱԼԵՔՍԱՆԴՐ ՇԵՎԿԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

8-րդ դասարանի դասագիրք

Վերահրատարակություն

Թարգմանությունը և փոփոխությունները՝ Ռուբեն Ավետիսյանի

Տեխ. խմբագիր՝	Արարատ Թովմասյան
Համակարգչային ձևավորող՝	Արմինե Պապանյան
Կազմի ձևավորող՝	Գևորգ Սահակյան

«Անտարես» հրատարակչատուն, ՀՀ, Երևան - 0009, Մաշտոցի 50ա/1
Հեռ.՝ (+374 10) 58 10 59, Հեռ. / ֆաքս՝ (+374 10) 58 76 69
antares@antares.am, www.antares.am

Հանձնված է տպագրության 26.06.2017թ.: Տառատեսակը՝ DallakTimeNew: Չափսը՝ 70x100 $^{1}/_{16}$: Տպագրությունը՝ օֆսեթ: 17,5 պայմ. տպագր. մամուլ: Տպաքանակը՝ 37 362 օրինակ: Տպագրված է «Անտարես Նաճո պրինտ» տպարանում, Արտաշիսյան 94/4: Պատվեր՝ № 170219: